UMMTO/FSECG

Département des sciences économiques

Le :09/05/2024

Module : Fondements de recherche opérationnelle

2ème Année sciences économiques / section :B

EMD2

Durée :1H :30Min

Exercice1 :

Une entreprise disposant de 10 000 m^2 de carton en réserve, fabrique et commercialise 2 types de boîtes en carton. La fabrication d'une boîte en carton de type 1 ou 2 requiert, respectivement, 1 et 2 m^2 de carton ainsi que 2 et 3 minutes de temps d'assemblage. Seules 200 heures de travail sont disponibles pendant la semaine à venir. Les boîtes sont agrafées et il faut quatre fois plus d'agrafes pour une boîte du second type que pour une du premier. Le stock d'agrafes disponible permet d'assembler au maximum 15 000 boîtes du premier type. Les boîtes sont vendues, respectivement, 30DZD et 50DZD

Question : Formuler le problème de la recherche d'un plan de production maximisant le chiffre d'affaires de l'entreprise sous forme d'un programme linéaire.

Exercice2 :

Résoudre le programme linéaire par la méthode graphique :

$$S/c \begin{cases} Min\ Z = 60X_1 + 100X_2 \\ 100X_1 + 200X_2 \ \geq 300 \\ 200X_1 + 200X_2 \ \geq 500 \\ 100X_1 + 200X_2 \ \geq 700 \\ X_1 \geq 0;\ X_2 \ \geq 0 \end{cases}$$

Exercice3 :

On considère le programme linéaire (P) :

$$\text{Max } z = 4x_1 + 2x_2 + x_3$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 2 \\ x_1 + x_3 \ \leq 1 \\ x_1 \ \geq 0;\ x_2 \geq 0\ ;\ x_3 \geq 0 \end{cases}$$

- Résoudre (P) par la méthode du simplexe

******Bon courage ******

N.B : l'utilisation de téléphone portable en guise de calculatrice est strictement interdite

Les calculs doivent figurer sur la copie d'examen

Veuillez écrire lisiblement

Corrigé type EM2

Fondements de recherche opérationnelle :

Exercice n° 1.

1) Identification des variables :

x_1 : nombre de boîte de type 1 à fabriquer.

x_2 : " " " 2 " (1)

2) Les contraintes structurelles

	x_1	x_2	disponibilités
carton	$1\,m^2$	$2\,m^2$	$10.000\,m^2$
Temps d'assemblage	2 min	3 min	200 x 60 min. = 12000 min.
Agraf.	1	4	15000

1ère contrainte : $x_1 + 2x_2 \leq 10.000$

2ème Contrainte : $2x_1 + 3x_2 \leq 12.000$ (1,5)

3ème Contrainte : $x_1 + 4x_2 \leq 15000$.

3) La fonction objectif.

Prix de x_1 = 30 DZD.

Prix de x_2 = 50 DZD $\Rightarrow$ $\text{Max } Z = 30x_1 + 50x_2$ (1,5)

4) Contraintes de positivité.

$x_1 \geq 0$; $x_2 \geq 0$

On peut écrire le P.L correspondant au problème de production (fabrication) de boîtes sous la forme mathématique suivante : $\text{Max } Z = 30x_1 + 50x_2$.

$$S/C \begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 10.000 \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 12.000 \\ x_1 + 4x_2 \leq 15000. \end{cases}$$ (1)

$x_1 \geq 0$; $x_2 \geq 0$

Exercice n° 2 :

$$\text{Min } Z = 60x_1 + 100x_2$$

$$\begin{cases} 100x_1 + 200x_2 \geqslant 300 \\ 200x_1 + 200x_2 \geqslant 500 \\ 100x_1 + 200x_2 \geqslant 700 \end{cases}$$

$$x_1 \geqslant 0 \; ; \; x_2 \geqslant 0$$

1) Représentation graphique des contraintes.

1ère Contrainte $\begin{cases} 100x_1 + 200x_2 > 300 \\ 100x_1 + 200x_2 = 300 \; \ldots (\Delta_1) \end{cases}$

x_1	0	3
x_2	1,5	0

1

2ème Contrainte $\begin{cases} 200x_1 + 200x_2 \geqslant 500 \\ 200x_1 + 200x_2 = 500 \; \ldots (\Delta_2) \end{cases}$

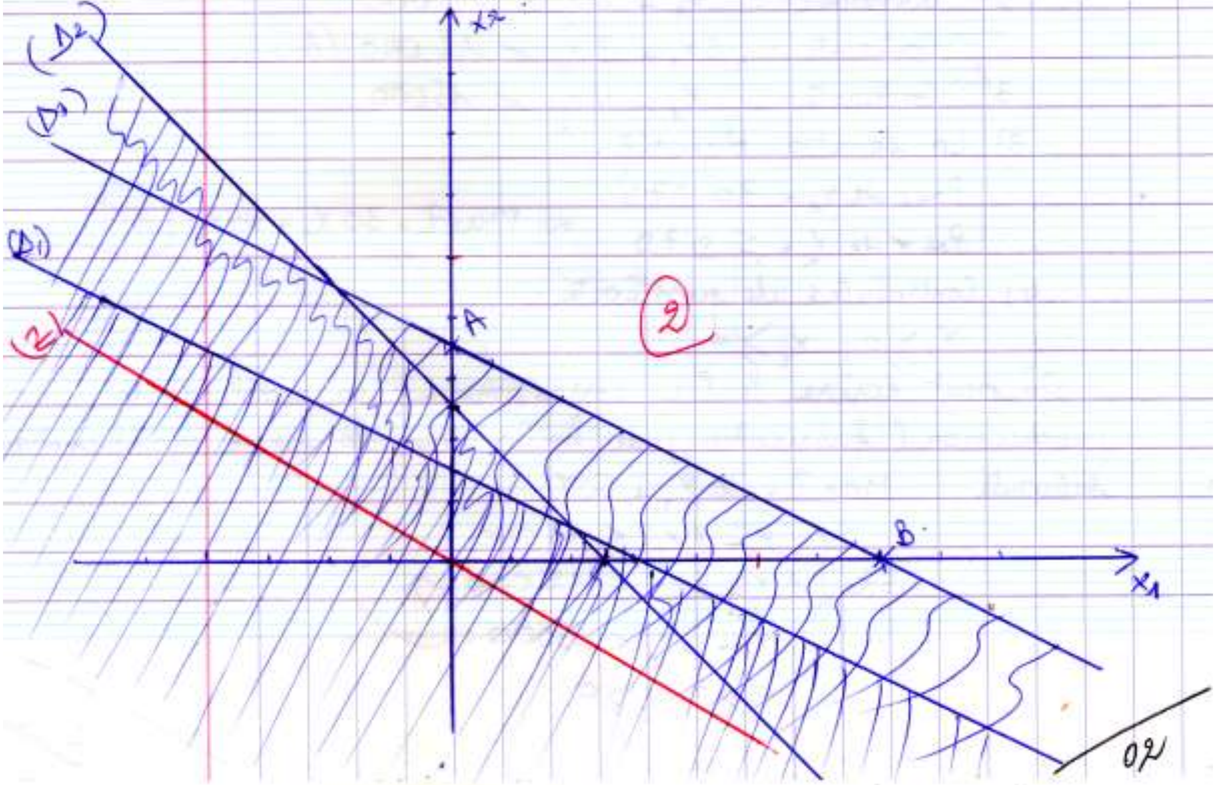
x_1	0	2,5
x_2	2,5	0

1

3ème Contrainte $\begin{cases} 100x_1 + 200x_2 > 700 \\ 100x_1 + 200x_2 = 700 \; \ldots (\Delta_3) \end{cases}$

x_1	0	7
x_2	3,5	0

1



2) Représentation graphique de fonction objectif :

$Z = 60x_1 + 100x_2 = 0$ (fonction linéaire)

x_1	0	5
x_2	0	-3

1

La zone des solutions réalisables est une zone ouverte à deux points extrêmes $A(0, 3.5)$ et $B(7,0)$ 0,5

En glissant la droite (Z) en parallèle dans le sens positif, le premier point extrême à atteindre est le point $A(0, 3.5)$ qui représente le point de solution optimale 0,5

pour $x_1^* = 0$ et $x_2^* = 3.5 \Rightarrow Z^* = 60(0) + 100(3,5)$

$Z^* = 350$ 1

Solution par énumération :

	x_1	x_2	Z	
Le point A	0	3,5	350	← Solution optimale.
le point B	7	0	420	

Exercice 3 :

$$\text{Max } Z = 4x_1 + 2x_2 + x_3$$

$$S/c \begin{cases} x_1 + x_2 \leq 2 \\ x_1 + x_3 \leq 1 \\ x_1 \geq 0 ; x_2 \geq 0 ; x_3 \geq 0 \end{cases}$$

1) écriture de P.L sous forme standard :

$$\text{Max } Z = 4x_1 + 2x_2 + x_3 + 0S_1 + 0S_2$$

$$S/c \begin{cases} x_1 + x_2 + S_1 = 2 \\ x_1 + x_3 + S_2 = 1 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \\ S_1, S_2 \geq 0 \end{cases}$$

1

2) Le premier tableau de simplexe:

c_j		4	2	1	0	0	bi	bi/ai1
CVB	VB	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2		
0	S_1	1	1	0	1	0	2	$2/1 = 2$
0	S_2	1	0	1	0	1	1	$1/1 = 1$
Z_j		0	0	0	0	0	$Z=0$	Min $b_i/a_{i1} > 0$
$C_j - Z_j$		4	2	1	0	0		

1

Max $(c_j - z_j) > 0$

Test d'optimalité: Il existe $(c_j - z_j) > 0 \Rightarrow$ la solution n'est pas optimale (0,5)

3) Le deuxième tableau de simplexe:

c_j		4	2	1	0	0	bi	b_i/a_{i2}
CVB	VB	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2		
0	S_1	0	1	-1	1	-1	1	$1/1 = 1$
4	X_1	1	0	1	0	1	1	$1/0$ Indeterminée
Z_j		4	0	4	0	4	$Z=4$	Min $(b_i/a_{i2} > 0)$
$c_j - Z_j$		0	2	-3	0	-4		

1

Max $(c_j - z_j) > 0$

$a_{13} = 0 - \frac{1 \times 1}{1} = -1$ $\quad$ $b_1 = 2 - \frac{1 \times 1}{1} = 1$

$a_{15} = 0 - \frac{1 \times 1}{1} = -1$ $\quad$ 0,75

Test d'optimalité: Il existe $(c_j - z_j) > 0 \Rightarrow$ la solution n'est pas optimale. 0,5

04

4) Le troisième tableau de simplexe :

c_j		4	2	1	0	0	b_i
CVB	VB	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	
2	X_2	0	1	-1	1	-1	1
4	X_1	1	0	1	0	1	1.
Z_j		4	2	2	2	2	$Z = 6$.
$C_j - Z_j$		0	0	-1	-2	-2	

1

Test d'optimalité : tout $(C_j - Z_j) < 0 \Rightarrow$ La solution est optimale

0,5

$X_1^* = 1$, $X_2^* = 1$, $Z^* = 6$.
$X_3^* = 0$.

0,75

05