

Série de TD n 3 sur les séries chronologiques et le corrigé type.

Exercice 1 : Le tableau suivant donne les effectifs des salariés de la branche textile, en milliers, entre 1991 et 1998.

t_i	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998
y_i	495	482	468	447	428	411	391	370

Questions :

1/ calculer l'équation de la droite d'ajustement du nombre de salariés y_i en fonction du temps t_i en utilisant obligatoirement la formule développée ou simplifiée de la variance dans le calcul de la pente « a ».

2/quel devrait être l'emploi salarié dans la branche en 2000 ?

Corrigé :

1/ L'équation de la droite se présente sous la forme : $y = at+b$. Pour déterminer les coefficients « a » et « b », on effectue un changement d'origine pour faire les calculs, c -à -d, que l'année 1991 correspondra à $t_1=1$, 1992 correspondra à $t_2=2$ et jusqu'à 1999 qui correspondra à $t_8=8$. Tous les calculs nécessaires sont consignés dans le tableau suivant :

t_i	y_i	$t_i y_i$	t_i^2
1	495	495	1
2	482	964	4
3	468	1404	9
4	447	1788	16
5	428	2140	25
6	411	2466	36
7	391	2737	49
8	370	2960	64
36	3492	14954	204

$Y = at + b$ avec $a = \frac{\text{cov}(ty)}{v(t)} = \frac{\sum t_i y_i - N \bar{t} \bar{y}}{\sum t_i^2 - N \bar{t}^2}$. On commence par calculer les moyennes \bar{t} et \bar{y} .

$$\bar{t} = \frac{\sum t_i}{N} = \frac{36}{8} = 4.5 ; \text{ et } \bar{y} = \frac{\sum y_i}{N} = \frac{3492}{8} = 436.5.$$

$$a = \frac{14954 - 8(436.5)(4.5)}{204 - 8 \cdot (4.5)^2} = -18.095 \approx -18.1$$

On a $\bar{y} = a\bar{t} + b$. on tire $b = \bar{y} - a\bar{t} = 436.5 - (-18.1)(4.5) = 517.9$.

$$Y = -18.1 t + 517.9.$$

2/ l'année 2000 va correspondre à $t_{10} = 10$. Alors l'effectif salarié sera égal à :

$$Y = -18.1(10) + 517.9 = 336.9 \approx 337 \text{ salariés.}$$

Série de TD n 3 sur les séries chronologiques et le corrigé type.

Exercice 2 : la série des indices trimestriels de vente de marchandises d'une entreprise est fournie pour trois années dans le tableau suivant :

	1997(1)	1998(2)	1999(3)
I	118.2	148.6	163.3
II	129	154.5	175.3
III	138.9	163	189.1
IV	157.1	184	217.9

En ligne nous avons les 4 trimestres I, II, III et IV et en colonne nous avons les 3 années 1,2 et 3.

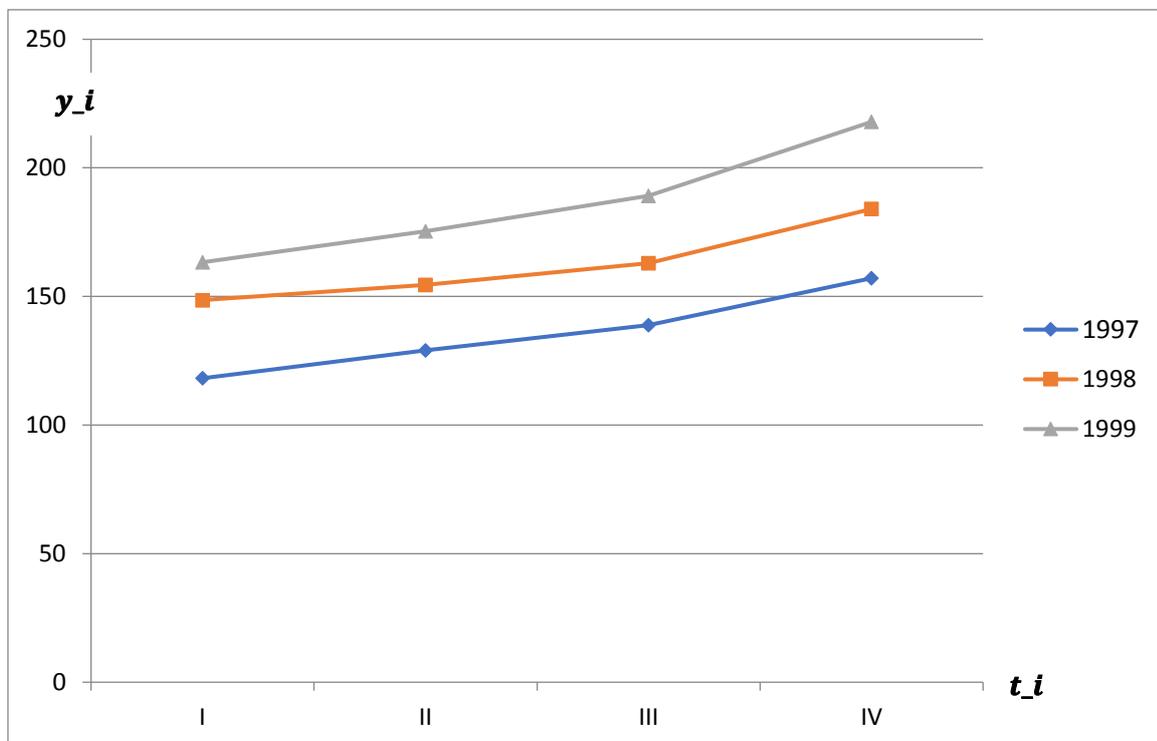
Questions :

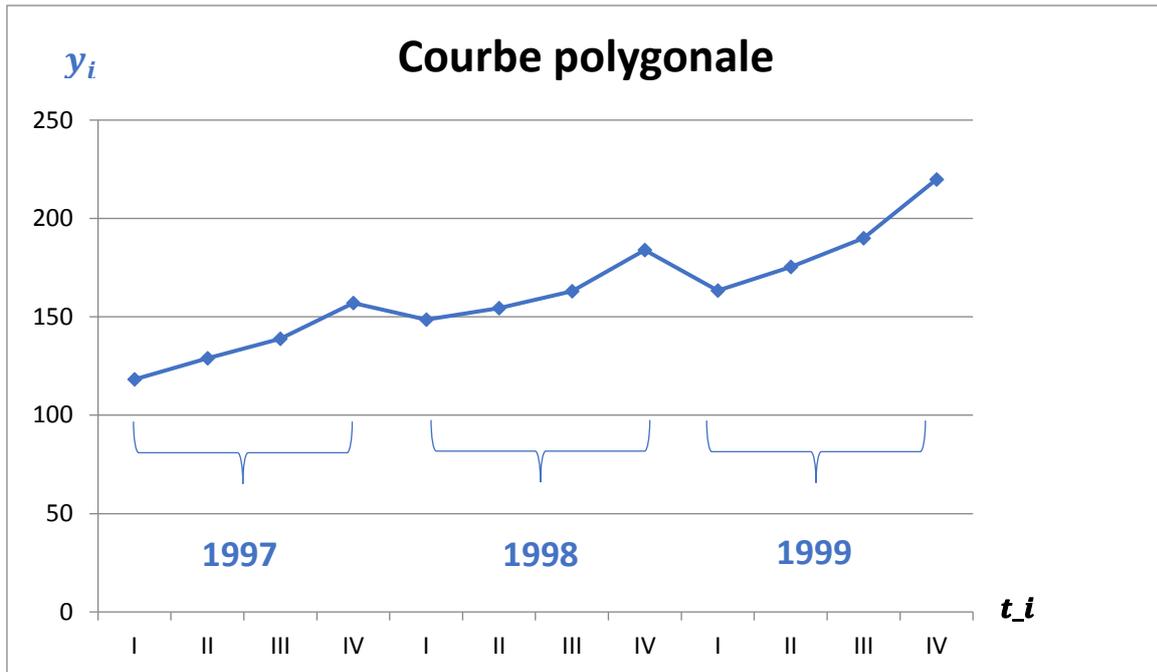
- 1/ Quel procédé permet de montrer que cette série subit des variations saisonnières ?
- 2/ Trouver l'équation de la droite de y en fonction du temps $y = f(t)$.
- 3/ Quel devrait être l'indice de vente de marchandise pour le premier trimestre de l'année 2000 ?
- 4/ Désaisonnaliser la série par la méthode des moyennes mobiles en supposant que le schéma de composition de la série est de type **additif** ($Y = T+S+A$).

Corrigé :

1/ le procédé qui permet de montrer que la série subit des variations saisonnières est de type graphique. On peut, par exemple, tracer des courbes superposées ou une courbe polygonale.

Courbes superposées





2/détermination de la droite $y(t) = f(t) = at + b$. On doit déterminer les coefficients « a » et « b ». Dans ce deuxième exercice, on va opter pour la formule de définition de la variance.

On aura $a = \frac{\sum(t_i - \bar{t})(t_i - \bar{y})}{\sum(t_i - \bar{t})^2}$, $\bar{t} = \sum t_i / N$ et $\bar{y} = \sum y_i / N$. Pour calculer ces différents paramètres nous devons établir le tableau de calculs suivant :

t_i	y_i	$(t_i - \bar{t})$	$(y_i - \bar{y})$	$((t_i - \bar{t})(y_i - \bar{y}))$	$(t_i - \bar{t})^2$
1	118.2	-5.5	-43.4	238.7	30.25
2	129	-4.5	-32.6	146.7	20.25
3	138.9	-3.5	-22.7	79.45	12.25
4	157.1	-2.5	-4.5	11.25	6.25
5	148.6	-1.5	-13	19.5	2.25
6	154.5	-0.5	-7.1	3.55	0.25
7	163	+0.5	+1.4	0.7	0.25
8	184	+1.5	+22.4	33.6	2.25
9	163.3	+2.5	+1.7	4.25	6.25
10	175.3	+3.5	+13.7	47.95	12.25
11	189.1	+4.5	+27.5	123.75	20.25
12	217.9	+5.5	+56.3	309.65	30.25
78	1938.9	//////	//////	1019.05	143

$$\bar{t} = \frac{78}{12} = 6.5, \bar{y} = \frac{1938.9}{12} = 161.58 = 161.6 \text{ et } a = \frac{1019.05}{143} = 7.126 = 7.13.$$

$\bar{y} = a\bar{t} + b$, $b = \bar{y} - a\bar{t} = 161.6 - (7.13)(6.5) = 115.26 = 115.3$. L'équation de la droite va donc s'écrire $y = at + b = 7.13t + 115.3$.

3/ A partir de cette équation, on peut calculer l'indice de vente pour le premier trimestre de l'année 2000 ou $t = 13$ comme suit : $y = 7.13(13) + 115.3 = 207.99$ ou 208.

Série de TD n 3 sur les séries chronologiques et le corrigé type.

4/Désaisonnalisation de la série avec la méthode des moyennes mobiles.

Schéma additif : $y = T + S + A$ on suppose que les variations accidentelles ou résiduelles (A) sont nulles. $Y = T + S$ et $S = Y - T \implies S_{ij} = Y_{ij} - M_{ij}$

On doit estimer la tendance ou le trend T en utilisant les moyennes mobiles M_{mij} .

Etape 1 : calcul des moyennes mobiles d'ordre 4 (on a 4 trimestres donc $p=4$).

$$Mm_{1III} = \frac{1}{4} \left(\frac{y_{1I}}{2} + y_{1II} + y_{1III} + y_{1IV} + y_{2I} \right) = \frac{1}{4} \left(\frac{118.2}{2} + 129 + 138.9 + 157.1 + \frac{148.6}{2} \right) = 139.6.$$

$$Mm_{1IV} = \frac{1}{4} \left(\frac{129}{2} + 138.9 + 157.1 + 148.6 + \frac{154.5}{2} \right) = 146.59 \approx 146.6$$

On obtient le tableau(2) suivant :

Tableau n°1 : données brutes y_{ij} .

	1		2		3	
I	118.2	y_{1I}	148.6	y_{2I}	163.3	y_{3I}
II	129	y_{1II}	154.5	y_{2II}	175.3	y_{3II}
III	138.9	y_{1III}	163	y_{2III}	189.1	y_{3III}
IV	157.1	y_{1IV}	184	y_{2IV}	217.9	y_{3IV}

Tableau n°2 : moyennes mobiles M_{mij} .

	1		2		3	
I	////		152.8		174.7	
II	////		159.2		182.2	(c)
III	139.6	(a)	164.4		//////	
IV	146.6	(b)	168.8		////////	

Etape 2 : on calcule les coefficients saisonniers bruts S_{ij} .

On a $Y_{ij} = M_{mij} + S_{ij} \implies S_{ij} = Y_{ij} - M_{mij}$. On fait donc la différence entre les données brutes et les moyennes mobiles pour obtenir les coefficients saisonniers bruts S_{ij} , on procède comme suit :

$$S_{1III} = 138.9 - 139.6 = -0.7 \text{ (a).}$$

$$S_{1IV} = 157.1 - 146.6 = 1.05 \text{ (b)}$$

$$S_{3II} = 175.3 - 182.2 = -6.9 \text{ ou } -0.7. \text{ Etc. Les résultats sont donnés par le tableau (3).}$$

Tableau n°3 : les coefficients saisonniers bruts S_{ij} .

	1		2		3	
I	////		-4.2		-11.4	
II	////		-4.7		-7	(c)
III	-0.7	(a)	-1.4		//////	
IV	10.5	(b)	15.2		////////	

Série de TD n 3 sur les séries chronologiques et le corrigé type.

Etape 3 : on calcule les S_j (coefficients saisonniers définitifs) qui sont les moyennes trimestrielles des coefficients bruts S_{ij} .

$$S_I = \frac{(-4.2) + (-11.4)}{2} = -7.8. \text{Tapez une équation ici.}$$

$$S_{II} = \frac{(-4.7) + (-7)}{2} = -5.85 \approx -5.9.$$

$$S_{III} = \frac{((-0.7) + (-1.4))}{2} = -1.05 \approx -1.1.$$

$$S_{IV} = \frac{(10.5) + (15.2)}{2} = 12.85 \approx 12.9.$$

A ce stade de calcul on doit tester à quoi est égale la moyenne de ces 4 coefficients. En théorie, cette moyenne doit être égale à zéro dans le modèle additif. Dans le cas contraire, on doit corriger ces coefficients et calculer les \hat{S}_j appelés coefficients saisonniers corrigés.

Ici $\sum S_j = -1.9$ et la moyenne $\frac{-1.9}{4} = -0.475$ (coefficient correcteur). On va alors soustraire (-0.475) à tous les coefficients trimestriels S_j .

$\hat{S}_j = S_j - \sum S_j / 4$; par exemple, $\hat{S}_I = -7.8 - (-0.475) = -7.3$. On obtient le tableau n°4.

Tableau 4 des coefficients définitifs S_j et coefficients définitifs corrigés \hat{S}_j .

TRIM	I	II	III	IV
S_j	-7.8	-5.9	-1.1	+12.9
\hat{S}_j	-7.3	-5.4	-0.6	+13.3

Ici la somme (et donc la moyenne) des $\hat{S}_j = 0$. On peut alors déterminer la série corrigée des variations saisonnières (SCVS) qui est la série désaisonnalisée demandée notée Y_{ij}^* .

Etape 4 : détermination de la SCVS (Y_{ij}^*) comme suit : $Y_{ij}^* = Y_{ij} - \hat{S}_j$

$$Y_{II}^* = 118.2 - (-7.3) = 125.5.$$

$Y_{3IV}^* = 217.9 - (13.3) = 204.6$. Etc... on obtient le dernier tableau (5) suivant :

	1	2	3
I	125.5	155.9	170.6
II	134.4	159.9	180.7
III	139.5	163.6	189.7
IV	143.8	170.7	204.6

Les chiffres de ce tableau sont obtenus en retranchant à chaque valeur Y_{ij} le coefficient correspondant : pour la 1^{ère} ligne, on retranche le coefficient du 1^{er} trimestre à savoir -7.3. Pour la 2^{ème} ligne, on retranche -5.4 ; la 3^{ème} ligne -0.6 et pour la dernière ligne, on retranche 13.3

Série de TD n 3 sur les séries chronologiques et le corrigé type.

Exercice 3: une entreprise a constaté l'évolution suivante de son chiffre d'affaire (C.A en 10⁶ DA) sur 4 années.

	Année 1	Année 2	Année 3	Année 4
Trim I	112.8	122.1	134.1	138.2
Trim II	123.6	132.4	144.4	150.3
Trim III	130.3	138.3	150.2	157.1
Trim IV	115.2	123.4	132.4	140.5

Q1/Désaisonnaliser la série en utilisant la méthode des moyennes mobiles en supposant que le schéma de composition de la SC est de type **multiplicatif**.

Q2/ Pour une croissance de 5% du C.A sur la 4^{ème} année, quel sera le C.A au 1^{er} trimestre de la 5^{ème} année ?

Corrigé :

Le schéma étant multiplicatif, $Y = S.T$. Et on suppose toujours que les variations aléatoires sont nulles ($A(t) = 0$).

On a $i = 1, 2, 3$ et 4 (années) et $j = I, II, III$ et IV (trimestres).

Tableau n°1 : données brutes Y_{ij} .

	1	2	3	4
I	112.8	122.1	134.1	138.2
II	123.6	132.4	144.4	150.3
III	130.3	138.3	150.2	157.1
IV	115.2	123.4	132.4	140.5

Calcul des moyennes mobiles M_{mij} :

Période $P = 4$ trimestres.

$M_{m_{III}}$ est centrée sur le troisième trimestre (III).

$$M_{m_{III}} = \frac{1}{4} \left(\frac{112.8}{2} + 123.6 + 130.3 + 115.2 + \frac{122.1}{2} \right) = 121.63$$

$$M_{m_{IV}} = \frac{1}{4} \left(\frac{123.6}{2} + 130.3 + 115.2 + 122.1 + \frac{132.4}{2} \right) = 123.9$$

$$M_{m_{2I}} = \frac{1}{4} \left(\frac{130.3}{2} + 115.2 + 122.1 + 132.4 + \frac{138.3}{2} \right) = 126$$

$M_{m_{2II}} = \frac{1}{4} \left(\frac{115.2}{2} + 122.1 + 132.4 + 138.3 + \frac{123.4}{2} \right) = 128.02$, etc..... Les résultats sont consignés dans le tableau suivant :

Tableau 2 : les moyennes mobiles M_{mij} .

	1	2	3	4
I	////	126	136.53	143.63
II	////	128.02	139.15	145.51
III	121.63	130.55	140.78	////
IV	123.9	133.55	142.03	////

Série de TD n 3 sur les séries chronologiques et le corrigé type.

L'étape suivante consistera à calculer les coefficients saisonniers bruts S_{ij} .

Nous avons $Y = T.S \iff Y_{ij} = M_{mij} \cdot S_{ij}$ d'où $S_{ij} = \frac{Y_{ij}}{M_{mij}}$; Par exemple nous avons $S_{1III} = 130.3/121.63$

$S_{1III} = 1.07$. Tous les autres calculs sont consignés dans le tableau(3) suivant :

Tableau n°3 : les coefficients bruts saisonniers S_{ij} .

	1	2	3	4
I	////	0.97	0.98	0.96
II	////	1.03	1.04	1.03
III	1.07	1.06	1.07	////
IV	0.93	0.92	0.93	//////

A partir de ce tableau, on détermine la moyenne trimestrielle de ces coefficients bruts et on obtient les 4 coefficients définitifs S_j .

$S_I = \frac{0.97+0.98+0.96}{3} = 0.97$. Même chose pour les 3 autres, ce qui nous donne le tableau N°4 suivant :

Trim	I	II	III	IV
S_j	0.97	1.03	1.07	0.93

On teste à quoi est égale la moyenne de ces coefficients : si elle est égale à un (schéma multiplicatif), on les garde, sinon on les corrige et on calcule les $\hat{S}_j = \frac{S_j}{\sum S_j/4}$.

Dans le cas présent nous avons bien $\sum S_j = 4$ et la moyenne est $4/4 = 1$, nous pouvons alors déterminer la série corrigée des variations saisonnières (SCVS) $Y_{ij}^* = Y_{ij}/S_j$.

Par exemple $Y_{1I}^* = Y_{1I}/S_I = 112.8/0.97 = 116.28$ soit 116.3, etc...

Tableau n°5 : série CVS : Y_{ij}^*

	1	2	3	4
I	116.3	125.9	138.24	142.5
II	120	128.5	140.2	145.9
III	121.8	129.25	140.4	146.8
IV	123.9	132.7	142.4	151.1

R2/ pour une croissance de 5% du chiffre d'affaire (C.A) sur la quatrième année, on peut estimer que ce CA au premier trimestre (I) de la cinquième année sera égal à :

- En termes réels : $CA = Y_{4I} \times 1.05 = 138.2 \times 1.05 = 145.11 \times 10^6$ DA
- En termes de coefficients saisonniers : $CA = 142.5 \times 0.97 = 138.225 \times 10^6$ DA