

## Série de TD n 3 sur les séries chronologiques et le corrigé type.

**Exercice 1** : Le tableau suivant donne les effectifs des salariés de la branche textile, en milliers, entre 1991 et 1998.

$t_i$	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998
$y_i$	495	482	468	447	428	411	391	370

### Questions :

1/ calculer l'équation de la droite d'ajustement du nombre de salariés  $y_i$  en fonction du temps  $t_i$  en utilisant obligatoirement la formule développée ou simplifiée de la variance dans le calcul de la pente « a ».

2/quel devrait être l'emploi salarié dans la branche en 2000 ?

### Corrigé :

1/ L'équation de la droite se présente sous la forme :  $y = at+b$ . Pour déterminer les coefficients « a » et « b », on effectue un changement d'origine pour faire les calculs, c-à-d, que l'année 1991 correspondra à  $t_1=1$ , 1992 correspondra à  $t_2=2$  et jusqu'à 1999 qui correspondra à  $t_8=8$ . Tous les calculs nécessaires sont consignés dans le tableau suivant :

$t_i$	$y_i$	$t_i y_i$	$t_i^2$
1	495	495	1
2	482	964	4
3	468	1404	9
4	447	1788	16
5	428	2140	25
6	411	2466	36
7	391	2737	49
8	370	2960	64
<b>36</b>	<b>3492</b>	<b>14954</b>	<b>204</b>

$Y = at + b$  avec  $a = \frac{\text{cov}(ty)}{v(t)} = \frac{\sum t_i y_i - N \bar{t} \bar{y}}{\sum t_i^2 - N \bar{t}^2}$ . On commence par calculer les moyennes  $\bar{t}$  et  $\bar{y}$ .

$$\bar{t} = \frac{\sum t_i}{N} = \frac{36}{8} = 4.5 ; \text{ et } \bar{y} = \frac{\sum y_i}{N} = \frac{3492}{8} = 436.5.$$

$$a = \frac{14954 - 8(436.5)(4.5)}{204 - 8 \cdot (4.5)^2} = -18.095 \approx -18.1$$

On a  $\bar{y} = a\bar{t} + b$ . on tire  $b = \bar{y} - a\bar{t} = 436.5 - (-18.1)(4.5) = 517.9$ .

$$Y = -18.1 t + 517.9.$$

2/ l'année 2000 va correspondre à  $t_{10} = 10$ . Alors l'effectif salarié sera égal à :

$$Y = -18.1(10) + 517.9 = 336.9 \approx 337 \text{ salariés.}$$

## Série de TD n 3 sur les séries chronologiques et le corrigé type.

**Exercice 2 :** la série des indices trimestriels de vente de marchandises d'une entreprise est fournie pour trois années dans le tableau suivant :

	1997(1)	1998(2)	1999(3)
I	118.2	148.6	163.3
II	129	154.5	175.3
III	138.9	163	189.1
IV	157.1	184	217.9

En ligne nous avons les 4 trimestres I, II, III et IV et en colonne nous avons les 3 années 1,2 et 3.

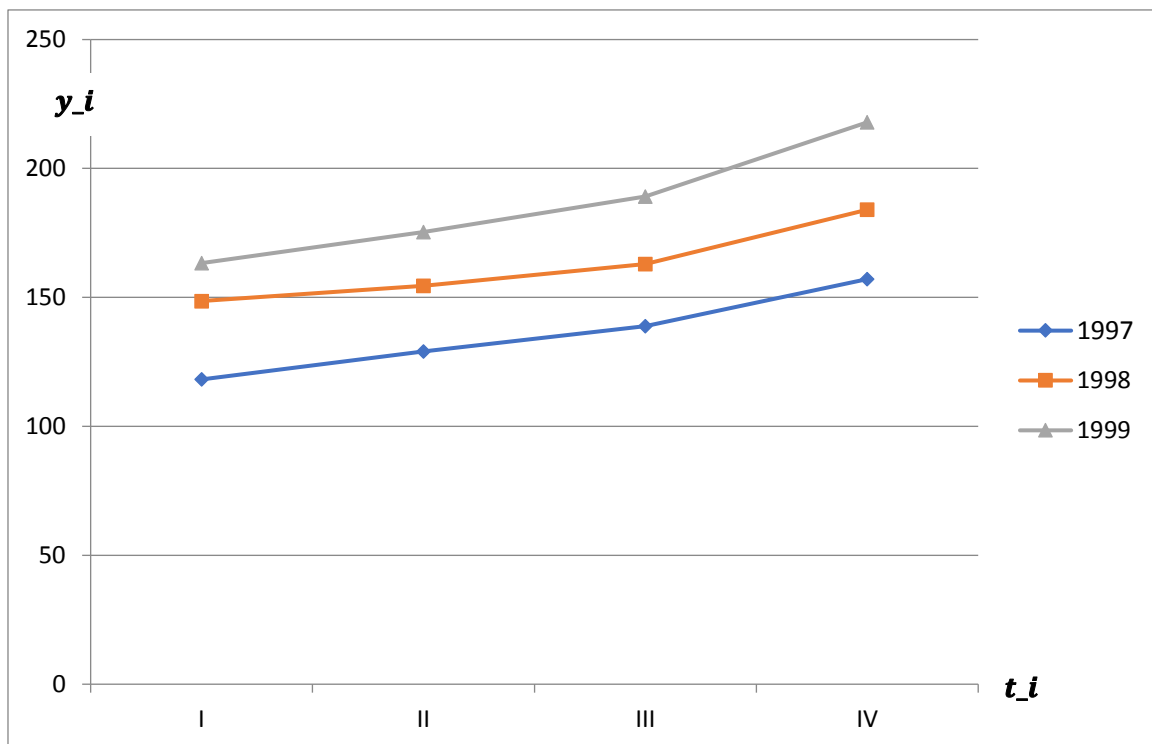
### Questions :

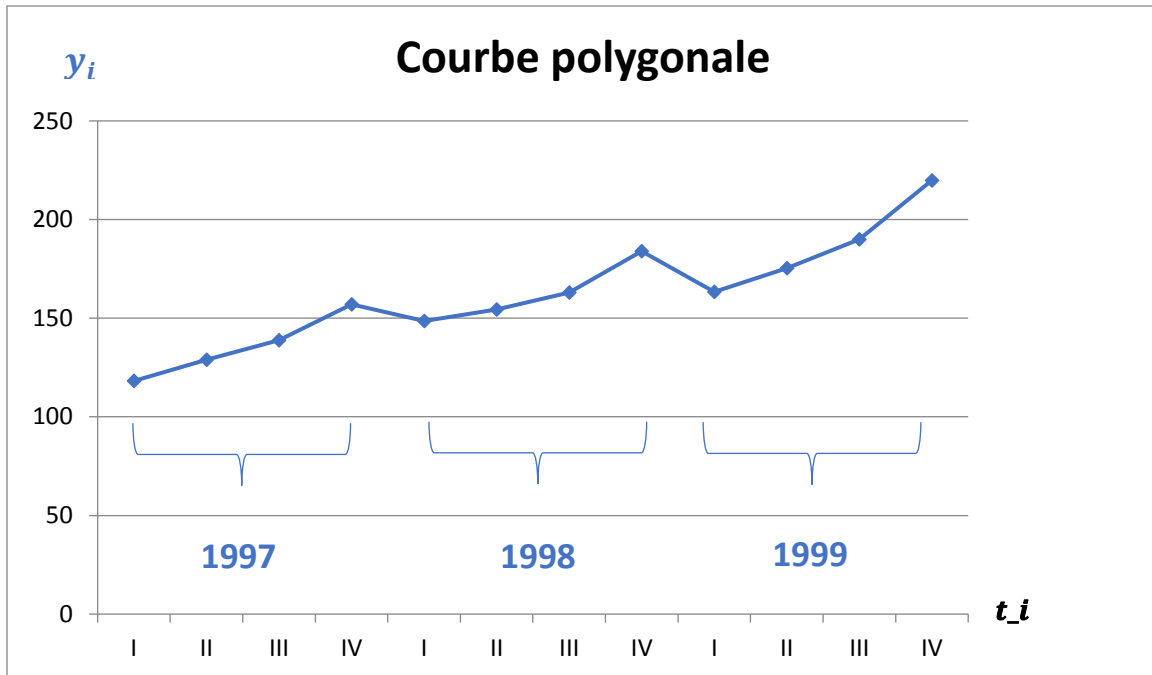
- 1/ Quel procédé permet de montrer que cette série subit des variations saisonnières ?
- 2/ Trouver l'équation de la droite de  $y$  en fonction du temps  $y = f(t)$ .
- 3/ Quel devrait être l'indice de vente de marchandise pour le premier trimestre de l'année 2000 ?
- 4/ Désaisonnaliser la série par la méthode des moyennes mobiles en supposant que le schéma de composition de la série est de type **additif** ( $Y = T+S+A$ ).

### Corrigé :

1/ le procédé qui permet de montrer que la série subit des variations saisonnières est de type graphique. On peut, par exemple, tracer des courbes superposées ou une courbe polygonale.

### Courbes superposées





2/détermination de la droite  $y(t) = f(t) = at + b$ . On doit déterminer les coefficients « a » et « b ». Dans ce deuxième exercice, on va opter pour la formule de définition de la variance.

On aura  $a = \frac{\sum(t_i - \bar{t})(t_i - \bar{y})}{\sum(t_i - \bar{t})^2}$ ,  $\bar{t} = \sum t_i / N$  et  $\bar{y} = \sum y_i / N$ . Pour calculer ces différents paramètres nous devons établir le tableau de calculs suivant :

$t_i$	$y_i$	$(t_i - \bar{t})$	$(y_i - \bar{y})$	$((t_i - \bar{t})(y_i - \bar{y}))$	$(t_i - \bar{t})^2$
1	118.2	-5.5	-43.4	238.7	30.25
2	129	-4.5	-32.6	146.7	20.25
3	138.9	-3.5	-22.7	79.45	12.25
4	157.1	-2.5	-4.5	11.25	6.25
5	148.6	-1.5	-13	19.5	2.25
6	154.5	-0.5	-7.1	3.55	0.25
7	163	+0.5	+1.4	0.7	0.25
8	184	+1.5	+22.4	33.6	2.25
9	163.3	+2.5	+1.7	4.25	6.25
10	175.3	+3.5	+13.7	47.95	12.25
11	189.1	+4.5	+27.5	123.75	20.25
12	217.9	+5.5	+56.3	309.65	30.25
78	1938.9	//////	//////	1019.05	143

$$\bar{t} = \frac{78}{12} = 6.5, \bar{y} = \frac{1938.9}{12} = 161.58 = 161.6 \text{ et } a = \frac{1019.05}{143} = 7.126 = 7.13.$$

$\bar{y} = a\bar{t} + b$ .  $b = \bar{y} - a\bar{t} = 161.6 - (7.13)(6.5) = 115.26 = 115.3$ . L'équation de la droite va donc s'écrire  $y = at + b = 7.13t + 115.3$ .

3/ A partir de cette équation, on peut calculer l'indice de vente pour le premier trimestre de l'année 2000 ou  $t = 13$  comme suit :  $y = 7.13(13) + 115.3 = 207.99$  ou 208.

## Série de TD n 3 sur les séries chronologiques et le corrigé type.

4/Désaisonnalisation de la série avec la méthode des moyennes mobiles.

Schéma additif :  $y = T+S+A$  on suppose que les variations accidentelles ou résiduelles (A) sont nulles.  $Y = T+S$  et  $S = Y - T \implies S_{ij} = Y_{ij} - M_{ij}$

On doit estimer la tendance ou le trend T en utilisant les moyennes mobiles  $M_{mij}$ .

Etape 1 : calcul des moyennes mobiles d'ordre 4 (on a 4 trimestres donc  $p=4$ ).

$$Mm_{1III} = \frac{1}{4} \left( \frac{y_{1I}}{2} + y_{1II} + y_{1III} + y_{1IV} + y_{2I} \right) = \frac{1}{4} \left( \frac{118.2}{2} + 129 + 138.9 + 157.1 + \frac{148.6}{2} \right) = 139.6.$$

$$Mm_{1IV} = \frac{1}{4} \left( \frac{129}{2} + 138.9 + 157.1 + 148.6 + \frac{154.5}{2} \right) = 146.59 \approx 146.6$$

On obtient le tableau(2) suivant :

Tableau n°1 : données brutes  $y_{ij}$ .

	1		2		3	
I	118.2	$y_{1I}$	148.6	$y_{2I}$	163.3	$y_{3I}$
II	129	$y_{1II}$	154.5	$y_{2II}$	175.3	$y_{3II}$
III	138.9	$y_{1III}$	163	$y_{2III}$	189.1	$y_{3III}$
IV	157.1	$y_{1IV}$	184	$y_{2IV}$	217.9	$y_{3IV}$

Tableau n°2 : moyennes mobiles  $M_{mij}$ .

	1		2		3	
I	////		152.8		174.7	
II	////		159.2		182.2	(c)
III	139.6	(a)	164.4		//////	
IV	146.6	(b)	168.8		////////	

Etape 2 : on calcule les coefficients saisonniers bruts  $S_{ij}$ .

On a  $Y_{ij} = M_{mij} + S_{ij} \implies S_{ij} = Y_{ij} - M_{mij}$ . On fait donc la différence entre les données brutes et les moyennes mobiles pour obtenir les coefficients saisonniers bruts  $S_{ij}$ , on procède comme suit :

$$S_{1III} = 138.9 - 139.6 = -0.7 \text{ (a).}$$

$$S_{1IV} = 157.1 - 146.6 = 1.05 \text{ (b)}$$

$$S_{3II} = 175.3 - 182.2 = -6.9 \text{ ou } -0.7. \text{ Etc. Les résultats sont donnés par le tableau (3).}$$

Tableau n°3 : les coefficients saisonniers bruts  $S_{ij}$ .

	1		2		3	
I	////		-4.2		-11.4	
II	////		-4.7		-7	(c)
III	-0.7	(a)	-1.4		//////	
IV	10.5	(b)	15.2		////////	

## Série de TD n 3 sur les séries chronologiques et le corrigé type.

Etape 3 : on calcule les  $S_j$  (coefficients saisonniers définitifs) qui sont les moyennes trimestrielles des coefficients bruts  $S_{ij}$ .

$$S_I = \frac{(-4.2) + (-11.4)}{2} = -7.8. \text{Tapez une équation ici.}$$

$$S_{II} = \frac{(-4.7) + (-7)}{2} = -5.85 \approx -5.9.$$

$$S_{III} = \frac{((-0.7) + (-1.4))}{2} = -1.05 \approx -1.1.$$

$$S_{IV} = \frac{(10.5) + (15.2)}{2} = 12.85 \approx 12.9.$$

A ce stade de calcul on doit tester à quoi est égale la moyenne de ces 4 coefficients. En théorie, cette moyenne doit être égale à zéro dans le modèle additif. Dans le cas contraire, on doit corriger ces coefficients et calculer les  $\hat{S}_j$  appelés coefficients saisonniers corrigés.

Ici  $\sum S_j = -1.9$  et la moyenne  $\frac{-1.9}{4} = -0.475$  (coefficient correcteur). On va alors soustraire  $(-0.475)$  à tous les coefficients trimestriels  $S_j$ .

$\hat{S}_j = S_j - \sum S_j / 4$  ; par exemple,  $\hat{S}_I = -7.8 - (-0.475) = -7.3$ . On obtient le tableau n°4.

Tableau 4 des coefficients définitifs  $S_j$  et coefficients définitifs corrigés  $\hat{S}_j$ .

TRIM	I	II	III	IV
$S_j$	-7.8	-5.9	-1.1	+12.9
$\hat{S}_j$	-7.3	-5.4	-0.6	+13.3

Ici la somme (et donc la moyenne) des  $\hat{S}_j = 0$ . On peut alors déterminer la série corrigée des variations saisonnières (SCVS) qui est la série désaisonnalisée demandée notée  $Y_{ij}^*$ .

Etape 4 : détermination de la SCVS ( $Y_{ij}^*$ ) comme suit :  $Y_{ij}^* = Y_{ij} - \hat{S}_j$

$$Y_{II}^* = 118.2 - (-7.3) = 125.5.$$

$Y_{3IV}^* = 217.9 - (13.3) = 204.6$ . Etc... on obtient le dernier tableau (5) suivant :

	1	2	3
I	125.5	155.9	170.6
II	134.4	159.9	180.7
III	139.5	163.6	189.7
IV	143.8	170.7	204.6

Les chiffres de ce tableau sont obtenus en retranchant à chaque valeur  $Y_{ij}$  le coefficient correspondant : pour la 1<sup>ère</sup> ligne, on retranche le coefficient du 1<sup>er</sup> trimestre à savoir -7.3. Pour la 2<sup>ème</sup> ligne, on retranche -5.4 ; la 3<sup>ème</sup> ligne -0.6 et pour la dernière ligne, on retranche 13.3

## Série de TD n 3 sur les séries chronologiques et le corrigé type.

**Exercice 3:** une entreprise a constaté l'évolution suivante de son chiffre d'affaire (C.A en 10<sup>6</sup> DA) sur 4 années.

	Année 1	Année 2	Année 3	Année 4
Trim I	112.8	122.1	134.1	138.2
Trim II	123.6	132.4	144.4	150.3
Trim III	130.3	138.3	150.2	157.1
Trim IV	115.2	123.4	132.4	140.5

Q1/Désaisonnaliser la série en utilisant la méthode des moyennes mobiles en supposant que le schéma de composition de la SC est de type **multiplicatif**.

Q2/ Pour une croissance de 5% du C.A sur la 4<sup>ème</sup> année, quel sera le C.A au 1<sup>er</sup> trimestre de la 5<sup>ème</sup> année ?

**Corrigé :**

Le schéma étant multiplicatif,  $Y = S.T$ . Et on suppose toujours que les variations aléatoires sont nulles ( $A(t) = 0$ ).

On a  $i = 1, 2, 3$  et 4 (années) et  $j = I, II, III$  et IV (trimestres).

Tableau n°1 : données brutes  $Y_{ij}$ .

	1	2	3	4
I	112.8	122.1	134.1	138.2
II	123.6	132.4	144.4	150.3
III	130.3	138.3	150.2	157.1
IV	115.2	123.4	132.4	140.5

Calcul des moyennes mobiles  $M_{mij}$ :

Période  $P = 4$  trimestres.

$M_{m_{III}}$  est centrée sur le troisième trimestre (III).

$$M_{m_{III}} = \frac{1}{4} \left( \frac{112.8}{2} + 123.6 + 130.3 + 115.2 + \frac{122.1}{2} \right) = 121.63$$

$$M_{m_{IV}} = \frac{1}{4} \left( \frac{123.6}{2} + 130.3 + 115.2 + 122.1 + \frac{132.4}{2} \right) = 123.9$$

$$M_{m_{2I}} = \frac{1}{4} \left( \frac{130.3}{2} + 115.2 + 122.1 + 132.4 + \frac{138.3}{2} \right) = 126$$

$M_{m_{2II}} = \frac{1}{4} \left( \frac{115.2}{2} + 122.1 + 132.4 + 138.3 + \frac{123.4}{2} \right) = 128.02$ , etc..... Les résultats sont consignés dans le tableau suivant :

Tableau 2 : les moyennes mobiles  $M_{mij}$ .

	1	2	3	4
I	////	126	136.53	143.63
II	////	128.02	139.15	145.51
III	121.63	130.55	140.78	////
IV	123.9	133.55	142.03	////

## Série de TD n 3 sur les séries chronologiques et le corrigé type.

L'étape suivante consistera à calculer les coefficients saisonniers bruts  $S_{ij}$ .

Nous avons  $Y = T.S \iff Y_{ij} = M_{mij} \cdot S_{ij}$  d'où  $S_{ij} = \frac{Y_{ij}}{M_{mij}}$ ; Par exemple nous avons  $S_{1III} = 130.3/121.63$

$S_{1III} = 1.07$ . Tous les autres calculs sont consignés dans le tableau(3) suivant :

Tableau n°3 : les coefficients bruts saisonniers  $S_{ij}$ .

	1	2	3	4
I	////	0.97	0.98	0.96
II	////	1.03	1.04	1.03
III	1.07	1.06	1.07	////
IV	0.93	0.92	0.93	//////

A partir de ce tableau, on détermine la moyenne trimestrielle de ces coefficients bruts et on obtient les 4 coefficients définitifs  $S_j$ .

$S_I = \frac{0.97+0.98+0.96}{3} = 0.97$ . Même chose pour les 3 autres, ce qui nous donne le tableau N°4 suivant :

Trim	I	II	III	IV
$S_j$	0.97	1.03	1.07	0.93

On teste à quoi est égale la moyenne de ces coefficients : si elle est égale à un (schéma multiplicatif), on les garde, sinon on les corrige et on calcule les  $\hat{S}_j = \frac{S_j}{\sum S_j/4}$ .

Dans le cas présent nous avons bien  $\sum S_j = 4$  et la moyenne est  $4/4 = 1$ , nous pouvons alors déterminer la série corrigée des variations saisonnières (SCVS)  $Y_{ij}^* = Y_{ij}/S_j$ .

Par exemple  $Y_{1I}^* = Y_{1I}/S_I = 112.8/0.97 = 116.28$  soit 116.3, etc...

Tableau n°5 : série CVS :  $Y_{ij}^*$

	1	2	3	4
I	116.3	125.9	138.24	142.5
II	120	128.5	140.2	145.9
III	121.8	129.25	140.4	146.8
IV	123.9	132.7	142.4	151.1

**R2/** pour une croissance de 5% du chiffre d'affaire (C.A) sur la quatrième année, on peut estimer que ce CA au premier trimestre (I) de la cinquième année sera égal à :

- En termes réels :  $CA = Y_{4I} \times 1.05 = 138.2 \times 1.05 = 145.11 \times 10^6$  DA
- En termes de coefficients saisonniers :  $CA = 142.5 \times 0.97 = 138.225 \times 10^6$  DA