Cours destinés aux étudiants du

1ére année LMD

Application des mathématiques en économie

Réalisé par Dr. Hadjira SIAMER

Maitre de conférences B

Université MOULOUD Mammeri

TIZI-OUZOU

L'objet de ce travail est de faciliter la lecture et la compréhension des ouvrages d'économie. L'accent est mis en permanence sur la traduction en langage courant de la formulation mathématique de l'économie. Sur la signification des concepts utilises ; sur les propriétés des instruments mis en œuvre ; sur l'interprétation des conclusions obtenues et leurs visualisation graphique.

Étant donné l'insuffisance des approches littéraires pour l'explication des phénomènes économiques; l'utilisation des mathématiques en économie est inéluctable, les économistes emploient largement les outils mathématiques et les analyses graphiques pour développer et expliquer leurs théories. Comprendre leurs travaux. s'initier a leurs thèses implique donc la nécessite de vaincre la crainte primitive que l'on éprouvait a l'égard de la formulation mathématique. Citant l'exemple de l'étude des rapports d'achat et de vente entre les agents économiques, la détermination de la demande d'une marchandise par le prix et le revenu, et par les gouts des consommateurs, ajoutant à cela l'efficacité du comportement marginal dans l'explication de divers phénomènes économiques tel que l'étude des coûts de production et les augmentations dans des utilités résultant de l'augmentation de consommation d'une seule unité.

Table des matières

Chapitre 01 : Les suites arithmétiques et les suites géométriques

1- **Généralités :** Les suites numériques sont utilisées pour modéliser les phénomènes socio économique comme la production d'une entreprise peut s'écrire ou s'exprimer sous forme d'une suite numérique.

1-1- Définition : Une suite numérique est une application de N dans R et n∈ R fait correspondre Un∈R que l'on note :

F : N→ R

n→ F(n) = Un

exemple : la suite numérique (Un) définie par : Un = 1/n sur $\dot{N}$ correspond les termes suivants :

U_1=1 ;

U_2=1/2 ;

U_3=1/3 ;

U_4=1/4 (c'est une suite infinie)

1-2- Suites croissantes et suites strictement croissantes

Une suite (Un) est dite croissante si pour tout entier n :

Un+1≥ Un

Une suite Un est dite strictement croissante si pour tout entier n :

Un+1>Un

1-3- Suites décroissantes et suites strictement décroissantes

Une suite Un est dite décroissante si pour toute entier n :

Un+1≤Un

Une suite est dite strictement décroissante si pour toute entier n :

Un+1<Un

Remarques : - Une suite est dite monotone lorsqu'elle est croissante ou décroissante, elle est strictement monotone lorsqu'elle est strictement croissante ou strictement décroissante .

- Une suite set dite stationnaire si :$\forall$ n$\in$N : Un+1= Un
- Une suite est dite majorée :$\forall$n$\in$N ; $\exists$A$\in$ R : Un$\leq$A
- Une suite est dite minorée :$\forall$n$\in$N ; $\exists$B$\in$R :Un$\geq$B
- Une suite set dite bornée si elle est a la foi majorée et minorée B$\leq$Un$\leq$A.

1-4- Suites convergentes, suites divergentes

On dit qu'une suite(Un) converge vers L ;ou que la limite de la suite (Un) quand n tend vers +∞ est L ; et l'on note :

$$\lim_{n \mapsto +\infty} U_n = L$$

si et seulement si la suite ($|U_n - L|$) converge vers 0

en particulier : $\lim_{n \mapsto +\infty} U_n = 0 \Leftrightarrow \lim_{n \mapsto +\infty} |U_n| = 0$

- Toute suite réelle qui n'est pas convergente vers un reel L est dite divergente

Remarque : une suite qui a une limite infinie est dite divergente

2- Les suites arithmétiques

2-1- Définition : on appelle suite arithmétique (ou progression arithmétique), une suite de nombre tel que chacun d'eux est la somme du précédent et d'un nombre fixe appelé raison de la suite.

Les termes successifs sont reliés par l'égalité :

Un+1= Un + r

Ou : Un+1 : terme d'ordre n+1

Un : terme d'ordre n

r : raison de la suite

2-2- Expression du terme générale

Soit la suite arithmétique de raison r : on a **$Un = U_1 + (n-1)r$**

Ou : Un : le terme d'ordre n

U1 : le premier terme de la suite

r : la raison de la suite

Remarque : si la suite commence a partir de U_0 on a **: $Un = U_0 + n.r$**

2-3- Terme équidistants des extrêmes (suite arithmétique finie)

Considérons les (n) termes d'une suite arithmétique de raison (r) : U1 ,U2 ,U3 , U4 ;……….Un-1 , Un

Les termes extrêmes sont U1 et Un

Considérons les termes équidistants des extrêmes, on obtient :

2-4- Moyenne arithmétique : Pour que trois nombres a,b,c soient dans cet ordre , les terme consécutifs d'une suite arithmétique , il faut et il suffit que l'on ait :

2.b=a+c

Le nombre b= $\frac{a+c}{2}$ est appelé la moyenne arithmétique de a et c

2-5- Expression de la somme : Ecrivons la somme une première fois dans un sens , et une seconde fois dans le sens inverse , en faisons correspondre les termes de même rang puis ajoutons nombre a un nombre

Sn= U1+U2+U3+…………….+Un-1 +Un

Sn= Un+ Un-1+ ………………+ U3+U2+U1

2Sn= (U1+Un)+(U2+Un-1)+(U3+Un-2)+…………+(Un+U1)

2Sn = n (U1+Un) d' ou $Sn = \frac{n}{2}\ (U1 + Un)$

Exercice

On considère une suite arithmétique de premier terme U1=2 et le 5^{eme} terme U5= 22(sachant que la suite est constituée de 5 cinq termes)

- Calculer la raison de la suite r

Solution

L'expression du terme général de la suite arithmétique est :

Un=U1+(n-1)r.................(1)

(1) ⇒(n-1) r = Un-U1

(1) $\Rightarrow r = \frac{Un - U1}{n-1} = \frac{22-2}{5-1} = 5$

3- Suites géométriques

3-1- Définition : on appelle suite géométrique (ou progression géométrique) ; une suite de nombre tel que chacun d'eux est le produit du précédent par un nombre fixe appelé raison de la suite

- les termes successifs sont reliés par l'égalité :

Un+1= Un . q

Ou : Un+1 : le terme d'ordre (n+1)

Un : le terme d'ordre (n)

q : la raison de la suite

3-2- Expression du terme général : Soit la suite géométrique de raison q

On a **$Un=U_1.q^{n-1}$**

Un : le terme d'ordre n ;

U1 : le premier terme de la suite ;

q : la raison de la suite.

Remarque : Si la suite commence à partir de U_0 : **$Un= U0 .q^n$**

3-3- Termes équidistants des extrêmes

Dans une suite géométrique finie, le produit de deux extrêmes équidistants des extrêmes est égal au produit des termes extrêmes. C'est –a- dire :

U1 ; U2 ………Up ………………..Un ; Un-1 ; Un

P termes **p termes**

3-4- Moyenne arithmétique : pour que trois nombres a,b ;c soient dans cet ordre , les termes consécutifs d'une suite géométrique ; il faut et il suffit que l'on ait :

$$\mathbf{b^2 = a.c}$$

Le nombre $b = \sqrt{a.c}$ est appelé la moyenne géométrique de a et c

3-5- Expression de la somme : soit une suite géométrique de raison q ≠1 et de termes : U1 ,U2, U3 …….Un

La somme Sn est égale a : $\boldsymbol{Sn = U1.\frac{q^n - 1}{q-1}}$

Ou : n : le nombre de termes

U1 : le premier terme

Un : le terme d'ordre n

q : la raison de la suite

Remarque : Si la suite(Un) commence a partir de U0 : $\boldsymbol{Sn = U0\,\frac{q^{n+1} - 1}{q-1}}$

Exercice : On considère une suite géométrique de premier terme U1= 2 et de 4 termes (n=4) et de raison q=3

- Calculer la somme

Solution : Pour calculer la somme on doit d'abord calculer la valeur du dernier terme qui correspond dans notre exemple à U4

$U4 = U1 .q^{n-1}$

$= 2.3^3 = 54$

$S = U1\frac{q^n-1}{q-1} = \frac{3^4\ -1}{3-1} = 80$

4- Application économique des suites arithmétiques

Nombreux sont les phénomènes de la vie courante qui peuvent être mathématiquement analysés a l'aide des suites. Comme l'augmentation d'un capital déposé a la caisse d'épargne.

Les mathématiques financière ne peuvent être comprise et maitriser si on ne possède pas certains notions essentielles de mathématiques générales dont on a parlé au paravent.

4-1- Intérêt simple : les intérêts simples sont des intérêts calculés uniquement sur le montant d'un capital, sans prendre en compte les intérêts antérieurs. ils sont utilisés dans les opérations financières de court terme, notamment le découvert et la remise a l'escompte d'un effet de commerce. Un intérêt correspond a la rémunération d'un capital, il peut être calculé :

- Pour un crédit, il sert alors à déterminer le coût du crédit ;
- Pour un placement, il sert alors à déterminer le rendement du placement.

Si on place un capital K_0 pendant n périodes aux taux périodique de t % chaque année, on retire les intérêts produits par le capital placé , ainsi chaque année , le montant des intérêts est le même que l'année précédente : on dit que le placement est a intérêt simple .

On a $\boldsymbol{I = \frac{t}{100}k0}$

Exemple : calculer la valeur d'un capital de 1000da placé pendant 3 ans au taux de 5% l'an

- Calcule de l'interet : $I = \frac{t}{100}\ K0\ \Rightarrow I = \frac{5}{100}\ (100) = 50$

Année	Capital placé début de période	Intérêts produits	Capital fin de période	Explication mathématique
01	1000	50	1050	K1= K0+I =1000+50
02	1050	50	1100	K2=K1+I =K0+I+I =K0+2I = 1000+2(50) =1100
03	1100	50	1150	K3=K2+I = K1+I+I =K0+I+I+I =K0+3I =1000+3(50) =1150

Les valeurs acquises successives forment une progression arithmétique (suite arithmétique) du premier terme K0 et de raison r (qui correspond a la valeur de l'intérêt I).

Exercice : Calculer la valeur au 26 mars d'un capital de 100000DA placé depuis le 15 mars a un taux annuel de 5 %.

Remarque : Par convention le nombre des jours de l'année est égal a 360 jours

Solution : On calcule la période dont le capital est placé (n) : n = 26-15= 11 jours

- On calcul l'intérêt acquis pour une année :

$$I = \frac{t}{100} K0 = \frac{5}{100}(100000) = 5000DA(\, pour\ une\ année)$$

- On calcul l'intérêt acquis pour un jours : I = 5000/360 = 13.89 DA

- La valeur acquise pendant 11 jours :

K11= K0+ N (I) (on rappelle que I correspond a la valeur de la raison de la suite)

K11= 100000+ 11(13.89)

K11= 100152.79DA

4-2- L'intérêt composé : Un capital est placé a intérêts composés, lorsque a la fin de chaque période de placement (généralement l'année) ; les intérêts simples produits viennent s'ajouter au capital pour que l'ensemble (capital et intérêt) produisent des intérêts simples a la période suivante

Exemple

Le même capital de 1000DA placé a 5% pendant 3 ans a intérêts composés

Année	**Capital début de période**	**Intérêts produits**	**Capital fin de période**
01	1000	50	1050
02	1050	1050. 5%=52.50	1102.50
03	1102.50	1102.5.5%=55.125	1157.625

Si : K0 capital début de période

t : le taux d'intérêt correspondant a la période de placement ;

n : le nombre d'année ;

A : la valeur acquise au de n période.

Année	**Capital début de période**	**Intérêts produits**	**Capital fin de période**
1	K0	K0.t	K1= K0+K0.t =K0(1+t)
2	K1=K0(1+t)	K1.t= K0(1+t)t	K2=K1+K1.t =K0(1+t)+K0(1+t).t =K0(1+t)(1+t) $K0(1+t)^2$
3	$K2= K0(1+t)^2$	$K2.t= K0(1+t)^2 .t$	K3= K2+K2.t $=K0(1+t)^2 +K0(1+t)^2.t$

			$=K0(1+t)^2\,(1+t)$ $= K0(1+t)^3$

Remarque Les valeurs acquises successives forment une progression géométrique du premier terme K_0(capital initial) et de raison q=1+t.

4-3- Suites et multiplicateur keynésien : Parmi les nombreuses utilisateurs des suites géométriques en économie ; on ne peut omettre leur application dans le cadre de l'analyse keynésienne.

Considérons que tout individu consacre par exemple 80% de son revenu supplémentaire à la consommation et 20% à l'épargne. Admettons pour simplifier que le pays vit en autarcie et que l'état ne prélève pas d'impôt.

Dans ce pays, une entreprise décide d'effectuer l'achat d'une machine supplémentaire d'une valeur de 1000DA ; on dit qu'elle effectue un investissement supplémentaire de 1000DA. L'achat de cette machine va entrainer chez l'individu n°1 (qui la fabrique) une augmentation du revenu de 1000DA. Cette augmentation de revenu va majorer :

- Son épargne d'un montant de 20%.1000= 200DA
- Sa consommation d'un montant de 80% .1000=800DA

L'individu n°1 effectue ses dépenses de consommation chez l'individu n°02. celui-ci voit donc son revenu augmenter de 800 DA (ou encore de 0.8 x 1000) . il affecte cette augmentation de revenu a l'épargne qui va donc augmenter de de 0.2 . 800 = 160 DA . il consomme le reste soit :

$0.80x800= 0.8x1000 = 0.8^2x100= 640$ DA

Cette dépense de consommation de l'individu n°2 va majorer le revenu de l'individu n° 3 et ainsi de suite.

Le tableau suivant permet de synthétiser ces « vagues successives »

	Variation de revenu	Epargne	Consommation
Individu n°01	1000	0.2x1000=200	0.8x1000=800
Individu n°02	800(=0.8x1000)	0.2x800=160	0.8x0.8x800x= 0.8^2x1000=640
Individu n°03	640(=0.8^2x1000)	….	….

Le mécanisme va se poursuivre jusqu'à ce que le revenu supplémentaire chez un individu soit négligeable. Or, cela arrivera puisque les augmentations de revenu sont en progression géométrique de raison inferieur à 1.

En admettant que la variation de revenu Δ du pays soit la somme des variations des revenus des agents du pays, on a ; en considérant les n premier individus : $\Delta y= 1000 + 0.8\text{x}1000+0.8^2\text{x}1000+\ldots\ldots+ 0.8^{n-1}\text{ x}1000$.

C’est la somme des termes d’une suite géométrique de premier terme 1000, de raison 0.8 et qui comporte n termes :

$$\Delta y= 1000.\frac{1-0.8^8}{1-0.8}$$

Si le nombre d’individus est très grand, si n tend vers l’infini, alors 0.8^n devient très faible et tend vers zéro. La variation du revenu Δy tend donc vers une limite. On dit alors que la somme des termes de la suite est convergente. Cela signifie que la somme d’un nombre infini de termes d’une suite géométrique peut avoir une limite finie.

Chapitre 02 : fonction d'une variable réelle

L'analyse économique ne se contente pas d'observer l'évolution des variables, elle cherche à déterminer les relations qui peuvent exister entre celles-ci. Nous envisagerons ici les fonctions d'une variable réelle.

1- **Généralités**

1-1- Définition : On appelle fonction numérique d'une variable réelle toute application de R dans R .

Notation : f : x $\longrightarrow$ f(x)

1-2- Domaine de définition d'une fonction numérique : On appelle domaine de définition d'une fonction réelle l'ensemble de tous les réels x pour les quels la fonction f(x) existe.

Exemple : trouver le domaine de définition de la fonction suivante :

1- $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$

Df ={x∈R/ x-1≠0}

Df =]-∞. 1[U] 1. +∞[

1-3- La parité

1-3-1- Fonction pair : On dit qu'une fonction f définie sur son domaine de définition D est pair si : $\forall x \in Df \,: F(x) = f(-x)$

1-3-2- Fonction impair : On dit qu'une fonction f définie sur son domaine de définition est impair si : $\forall x \in Df \,: f(-x) = \, -f(x)$

1-3-3- Intérêt de la parité : Si une fonction est pair ou impair, il suffit de faire son étude sur Df^+ et ainsi réduire la durée de l'étude en moitie. Et la courbe représentative obtenue est ensuite complétée par symétrie par rapport a l'axe des ordonnées si la fonction est pair, et par rapport a l'origine des axes si la fonction est impair.

1-4- Limites d'une fonction aux bornes de son domaine de définition

1-4-1 **Cas d'un polynôme au voisinage de l'infinie :** La limite a l'infinie d'un polynôme est la limite de son terme le plus haut degré.

Exemple : $\lim_{x\to\infty}(x^2 + 5x - 1) = \lim_{x\to\infty} x^2 = \infty$

1-4-2- **Cas d'une fraction rationnelle :** La limite a l'infinie d'une fraction rationnelle est égale a la limite du quotient simplifie de ses termes de plus haut degré.

Exemple : $\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+5x-2}{x^2-3}=\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2}{x^2}=3$

2- Application des limites en économie

Exemple : Lorsque le passager d'un train regarde sa montre et conclut : « il est presque 22h, il nous reste a Paine plus de 100km », il utilise implicitement le concept de limite. L'heure se rapproche de 22h (on dit t tend vers 22h) et la distance d qui le sépare de la gare d'arrivée et qui dépend de l'heure avoisine 100 km (on dit que d tend vers 100).

On écrit alors : $t\mapsto 22$, $d(t)\mapsto 100$ (qui se lit : « d tend vers 100 quand t tend vers 22 »

Ou encore : $\lim_{t\to 22} d(t)=100$

Le passage à la limite est une technique que l'on utilise très fréquemment en économie dans le cadre de l'analyse marginalisme.

3- La dérivée d'une fonction

3-1- **Définition** : soit f dérivable en tout x d'un intervalle . la fonction qui a x associé le nombre dérivé $f'(x)$, est appelée : la fonction dérivée.

Tableau des dérivées des fonctions usuelles

F(x)	**f'(x)**
F(x)= a / a : constant	$f'(x) = 0$
$F(x) = x^n$ / $n\neq0$	$f'(x)=n\,x^{n-1}$
$f(x) = \sqrt{x}$ / $x\geq0$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ $x>0$
$f(x) = [u(x)]^n$	$f'(x) = n[u(x)]^{n-1}\,\dot{u}(x)$
$f(x) = [u(x) + v(x)]$	$f'(x) = [\dot{u}(x) + \dot{v}(x)]$
$f(x) = [u(x)v(x)]$	$f'(x) = [\dot{u}(x).v(x) + \dot{v}(x).u(x)]$
$f(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)}$ $u(x) \neq 0$	$f(x) = \dfrac{\dot{u}(x).v(x) - \dot{v}(x).u(x)}{[v(x)]^2}$

3-1- Dérivabilité d'une fonction et nombre dérivé

Soit f définie sur un intervalle tel que x_0 soit élément de cet intervalle

On dit que f est dérivable ou point x_0 si et seulement si :

$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = A$

A : limite finie appelé nombre dérivé de f en x_0 et on note $f'(x_0) = (A)$

On dit que f est dérivables son intervalle de définition si elle est dérivable en tout point de cet intervalle.

4- Application des fonctions a une seule variable en économie

4-1- **Concepts économiques et notations mathématiques :** Une variables est une quantité qui peut prendre de différentes valeurs dans un problème .la quantité d'un bien vendue par un supermarché n'est pas identique tous les jours donc cette dernière est une variable.

Pour noter les variables le mathématicien utilise volontiers des lettres X,Y,Z, en revanche l'économiste préfère appeler les variable en faisant référence a l'initiale de leur nom : P pour le prix, Q pour la quantité C pour la consommation I pour l'investissement i pour le taux d'intérêt . en effet l'économiste a des notations parlantes qui rappellent l'objet de l'étude .

4-2- **Relations mathématiques entre variables :** l'analyse économique ne se contente pas d'observer l'évolution des variables, elle cherche à déterminer les relations qui peuvent exister entre celles-ci. nous envisagerons ici les fonctions de cout total et de cout moyen et de cout marginal

4-3- **La fonction du cout total et du cout moyen :** Les économistes entendent par le cout total, un cout global, la somme de toutes les dépenses engagées dans le but de produire ou de commercialiser une certaines quantité des biens.

Si x est le nombre d'unités de production (Q). Le cout total (CT) est lié à x par la relation CT= f(x).

Cette question revêt un grand intérêt en économie. Il est ainsi souvent utile de savoir de combien varie le coût total d'une production lorsque les quantités produites augmentent.

Si le coût total passe de $CT(Q_1)$ a $CT(Q_2)$ lorsque les quantités produites passent de Q_1 a Q_2 , on écrira que CT varie de $CT(q_2)$-$CT(Q_1)$ (ou encore de ΔCT) lorsque les quantité varient de Q_2-Q_1 (ou encore de ΔQ).

Le taux d'accroissement du coût total est donc : $t = \frac{CT(Q_2)-CT(Q_1)}{Q_2-Q_1} = \frac{\Delta CT}{\Delta Q}$

Ainsi, si le coût de production de 10unités d'un bien est de 2000um et que le coût de production de 15unités du même bien est de 3000um, on dira que le taux d'accroissement t vaut :

$$t = \frac{3000 - 2000}{15 - 10} = 200$$

On peut encore interpréter ce résultat comme étant le coût moyen de production des 5unités supplémentaires produites au-delà de la deuxième unité .ce coût est ici dans notre exemple de 200um.

D'où le cout moyen est le coût d'une seule unité de production, et si le coût total est donné comme étant une fonction CT(x), le coût moyen sera donc :

$$CM = \frac{CT(x)}{x}$$

De la même façon, on peut s'interroger sur la variation de la production totale PT (L) lorsque la quantité de travail L augmente. Si la production totale passe de PT(L1) à RT(L2) lorsque la quantité de travail passe de L1 à L2, le taux d'accroissement t vaut alors :

$t = \frac{PT(L_2)-PT(L_1)}{L_2-L_1} = \frac{\Delta PT}{\Delta L}$.

4-4- La fonction du coût marginale

Définition : le cout marginal traditionnellement noté Cm(Q), est la variation de coût total CT(Q) entrainée par une variation infiniment petite des quantités produites. Le cout marginal est donc rien d'autre que la dérivée du cout total.

Et l'on notera : $Cm(Q) = \dot{CT}(Q)$, ou encore Cm (Q)= dCT(Q)/Dq.

Remarquons cependant que, dans des ouvrages d'initiation a l'économie, on, définit parfois le coût marginal comme le cout de production de la dernière unité produite .cela revient à écrire que $Cm(Q) = \Delta CT/\Delta Q$, avec $\Delta Q=1$.

Cette première approche correspond à la notion de taux d'accroissement. Le « vrai » cout marginal correspond à la notion de dérivée.

Pour le mathématicien, une variation infiniment petite de quantité est une variation qui tend vers zéro. En économie, faire tendre les variations de quantité vers zéro n'a guerre de sens.

De la même façon le produit marginal du travail, noté Pm(L) , est la variation de la production totale PT(L) entrainée par une petite variation de la quantité de travail utilisée , et l'on écrira :

$Pm(L)= PT'(L)= d\ PT(L) / DL$.

Le produit marginal du travail est la dérivée de la fonction de production totale.

Un troisième exemple est la notion de recette marginale, RM. C'est la variation de la recette totale RT(Q) entrainée par une variation infiniment petite des quantités vendues Q. on écrira donc :

$Rm(Q)= RT'(Q)= dRT(Q)/Dq$.

La recette marginale est la dérivée de la fonction de recette totale.

De façon générale, tout ce que l'on nomme marginal en économie correspond dans l'approche mathématique a la dérivée de ce qui est nommé « total » en économie.

5- Le calcul de l'élasticité

La dérivée permet également de mesurer la sensibilité d'une fonction a la variation d'une variable, qui est le lien existant entre la variation relative de la variable $\Delta x/x$ est la variation relative de la fonction $\Delta f/f$ et est mesuré par ce que l'on appelle l'élasticité de f par rapport a x.

En économie ce rapport est utilisé généralement pour mesurer la variation de la quantité demandée de la part des individus dû a la variation des prix, du revenu des ses individus et les prix des autres biens.

5-1- **Elasticité prix de la demande :** Une question que se pose souvent le chef de rayon d'une grande surface est : « si je baisse mon prix d'un certain pourcentage, de quel pourcentage variera la demande ? » il souhaite mesurer la réaction de la demande au prix ; il cherche à connaitre l'élasticité prix de la demande.

On peut encore écrire que l'élasticité prix ; e_p , est égale au pourcentage de variation de la demande au pourcentage de prix l'ayant induit :

$$ep = \frac{\%\ de\ variation\ de\ la\ quantité\ demandée}{\% de\ variation\ di\ prix}$$

Ce rapport on peut l'écrire :

$$e\rho = \frac{\frac{\Delta Q(P)}{Q(P)}}{\frac{\Delta P}{P}}$$

Soit encore : $\frac{\Delta Q(P)}{Q(P)} \times \frac{P}{\Delta P} = \frac{\Delta Q(P)}{\Delta P} \times \frac{p}{Q(P)}$

$\Delta Q(P)/\Delta P$ est le taux d'accroissement de la quantité demandée en fonction du prix .

Si les deux prix entres lesquels nous étudions les variations de demande sont assez éloignés l'un l'autre, l'élasticité que l'on calcule est une élasticité arc.

5-2- **L'élasticité point :** On pourrait concevoir le calcul d'une élasticité pour d'infiniment petites variations de prix, alors $\Delta Q/\Delta P$ correspondrait a la dérivée de la fonction Q(P), que l'on note Q'(P) ou d(Q)/dP. L'élasticité que l'on détermine alors est calculée « autour »d'un point. On parle de l'élasticité: point et l'on l'écrire :

$$ep = Q^{'}(P) \times \frac{P}{Q(P)} = \frac{dQ(P)}{dP} \times \frac{P}{Q(P)}$$

Dans cette dernière écriture, dQ(P) / dP est la valeur de la dérivée au point considéré.

Les deux approches sont concevables mais la première soulevé quelques problèmes. par exemple, la quantité d'un bien est : Q=50 pour P=25um, et Q=70 pour P=15um .

Si le prix passe de 25um à 15um, $ep = \frac{\frac{70-50}{50}}{\frac{15-25}{25}} = -1$

Si le prix passe de 15 um a 25 um , $ep = \frac{\frac{50-70}{70}}{\frac{25-15}{15}} = -0.4$

L'élasticité arc, en termes de taux d'accroissement, ne donne pas les mêmes résultats selon qu'on raisonne en augmentant ou en baissant les prix. Cela est dû au fait qu'un pourcentage dépend de la base de calcul qui est toujours le point de départ. Cette difficulté disparait si l'on recourt au concept d'élasticité arc, qui utilise la notion de dérivée.

Ainsi, si Q(P) =-2P+100, l'élasticité au point P=25 (pour lequel Q=50) est $e = Q^{'(P)} \times \frac{P}{Q(P)} = -2 \times \frac{25}{50} = -1.$

Ce résultat demeure vrai si P varie infiniment peu, a la hausse comme a la baisse d'un prix initial de 25um.

Chapitre 03 : primitives et notion d'intégration

La dérivation, comme nous l'avons vu dans le chapitre précédent, analyse l'impact sur une fonction d'une variation infiniment petite de la variable .comme de nombreuses autres opérations mathématiques, l'opération dérivation connait une opération inverse, réciproque. Cette opération inverse de la dérivation est nommée intégration .son objet est de trouver « combien vaut l'intégralité de quelque chose » lorsqu'on connait seulement une partie .le seul terme de calcul intégral peut effrayer le lecteur. Cependant, ce terme recouvre l'idée simple qu'est la notion de somme.

1- Notion de primitive

1-1- Définition : on appelle fonction primitive de la fonction f que l'on note F toute fonction f qui vérifie les deux conditions suivantes :

- **F** est définie sur le même domaine de définition ;
- La fonction dérivée de F est la fonction f : $F'(x)= f(x)$

Exemple : la primitive de $f(x)= 2x$ est $F(x) =x^2$ car la dérivée de $F(x)= x^2$ est $f(x)= 2x$

1-2- Recherches de toutes primitives d'une fonction

$F(x)= x^2$ est la primitive de $f(x) = 2x$;

$F(x) =x^2+4$ est la primitive de la même fonction $f(x)=2x$;

$F(x)= x^2-9$ est la primitive de la même fonction.

On écrit donc $F(x)= x^2 +c$ est / c est une constante

Pour déterminer c, il faut les conditions initiales.

<u>**Exemple :**</u> Sachant que $F(1)= 0$, calculer la primitive de $f(x)=2x$.

Solution : $F(x) = x^2+c$

$F(1) = 0 \Rightarrow 1+c = 0 \Rightarrow c= -1$ d'où la primitive $F(x)= x^2-1$

Notation : $\int f(x)dx = F(x) + c$ qui se lit : intégrale de f ou bien primitive de f

Tableau des primitives des fonctions usuelles

Fonctions	**Primitives**
a / a∈ R	ax+c / c est une constante
x	$\frac{1}{2}x^2 + c$
$\mathbf{x^m}$	$\frac{1}{m+1}x^m + c$
$\frac{1}{x^2} = x^{-2}$	$-\frac{1}{x} + c$
$x^{1/2} = \sqrt{x}$	$\frac{2}{3}x^{3/2} + c$ ou $\frac{2}{3}\ x\sqrt{x}$ +c
$\frac{1}{\sqrt{x}} = x^{1/2}$	$2\sqrt{x} + c$
Cos x	**Sinx+c**
Sin x	**-cos x+c**
Cos (ax+b)/ a ≠0	$\frac{1}{a}\ sin\ (ax+b) + c$
Sin (ax+b) / a≠0	$-\frac{1}{a}(ax+b) + c$
U´ + V´	**U+V+C**
U´V+UV´	**UV**
$\frac{U'}{u^2}\ /U \neq 0$	$-\frac{1}{U} + C$
$\frac{U'}{\sqrt{U}}\quad U > 0$	$2\sqrt{U} + c$
UU´	$\frac{U^2}{2} + c$
$\frac{1}{x}\quad x > 0$	$\ln x + c$
$\frac{a}{ax+b}$	$\ln\lvert ax+b\rvert$
e^{ax}	$\frac{1}{a}e^{ax}$

<u>Exemple</u> : Calculer les primitives de f sachant que la valeur prise par F (0)=4

f(x)=$\frac{x^2}{3} + \frac{x}{2} + 4$

Du tableau on sait que $\int x^m \ dx = \frac{1}{m+1} x^{m+1}$

D'où $F(x) = \frac{1}{3}\frac{x^3}{3} + \frac{1}{2}\frac{x^2}{2} + 4x + c$

Sachant que F(0)=4 ⇒F(0)= c ⇒c=4

Alors la primitive est $F(x) = \frac{1}{3}\frac{x^3}{3} + \frac{1}{2}\frac{x^2}{2} + 4x + 4$

2- Application des primitives en économie

2-1- **La sommation :** Un économiste étudie le cout de production d'un bien, unité par unité. il estime que la première unité produite coute 14 um, ce qui recouvre l'achat de la machine, la matière première et le travail. la machine étant achetée, son prix n'entre plus dans les couts de production des unités suivantes. Cet économiste estime que la deuxième unité lui coute 3 um , la troisième 2 um et la quatrième 1um . le coût de chaque unité supplémentaire est nommé coût marginal ; il est noté Cm comme on l'a vu dans le chapitre précédent.

- Le cout marginale de la première unité est : Cm(1)= 14 ;
- Le cout marginale de la deuxième unité est : Cm(2)= 3 ;
- Le cout marginal de la troisième unité est : Cm(3)=2 ;
- Le cout marginal de la quatrième unité est ;Cm(4)=1.

Le coût total CT est une fonction des quantités produites Q. étant ici une variable discontinue et mesurables, les variations se font a chaque fois d'une unité.

- Produire une unité coute 14um ;
- Produire deux unités coute 14+3=17um ;
- Produire trois unités coute : 14+3+2=19um ;
- Produire quatre unité coute : 14+3+2+1=20um

On peut encore écrire ici CT(4)= Cm(1)+Cm(2)+Cm(3)+Cm(4).

Cette expression peut être écrite de façon plus brève en utilisant le signe ∑

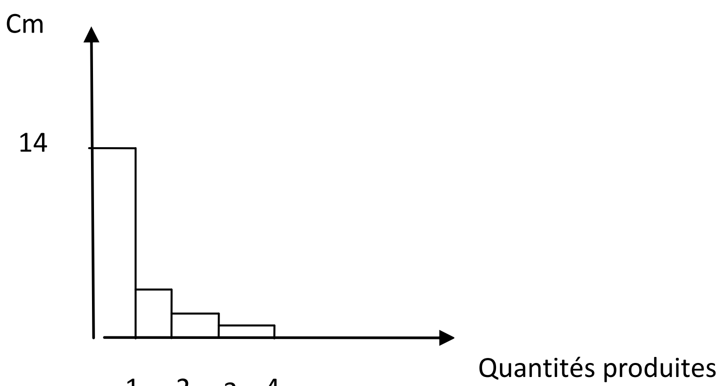
On a alors : CT =$\sum_{i=1}^{4} Cm(i)$

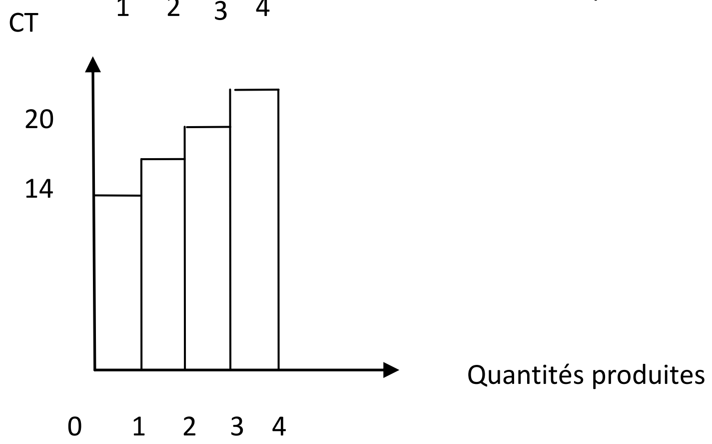
Si l'entreprise produisait non pas quatre unités mais n unités, on écrirait de façon générale

$CT(n) = \sum_{i=1}^{n} Cm(i)$

Expression qui se lit « le coût total égal a la somme des coûts marginaux »Cm(i) pour i=1 jusqu'à i=n.

Il est assez facile de traduire graphiquement ce problème. Le graphique ci-contre montre que le cout marginal dépend de la variable discontinue que sont les quantités produites, et que le cout total dépend de la même variable discontinue : le cout total augmente par paliers. Il importe de bien saisir le lien entre les deux graphiques : connaissant le coût marginal, on peut en déduire le coût total par cumul, par sommation.





Réciproquement, connaissant le coût total, on peut obtenir le cout marginal en « décumulant ».

Le problème est ici relativement simple parce que la variable retenue est discontinue. Il en est souvent ainsi en économie. Dans ce cas, la sommation est une méthode simple à appliquer. Mais elle présente un inconvénient majeur : la solution ne peut être obtenue que pas a pas et prête mal a une généralisation facilitant les calculs ultérieurs. En outre, la sommation ne peut s’appliquer aux variables continues qui, elles requièrent la technique de l’intégration.

2-2- L'intégration en économie : Le concept d'intégration n'est pas fondamentalement différent de celui de la sommation mais il concerne des variables continues, c'est-à-dire des variables susceptibles de connaitre des variations infiniment petites (ou encore des variables telles qu'entre deux valeurs de la variable, il peut toujours exister une valeur intermédiaire).

Reprenons l'exemple des couts de production d'un bien ; imaginons que ce bien soit la semoule et que l'unité de quantité produite est précédemment utilisée est le kilogramme .connaissant le cout marginal de production de chaque kilogramme, on a pu approcher ^par sommation le cout total de production d'un certain nombre de kilogrammes.

On ne fait qu'approcher le cout total, on aurait obtenu des résultats plus proches de la réalité en étudiant le cout de production par 500gramme. Mieux encore, on aurait été plus proche de la réalité si l'on avait pu connaitre le cout marginal de production du grain de semoule nous aurait permis de connaitre le cout total. la sommation concerne alors des variations infiniment petite de la variable. On parle dans ce cas d'intégration

Avec une variable discontinue-t-on écrit : $CT(4) = \sum_{i=1}^{4} Cm(i)$

Avec une variable continue-t-on écrit :$CT(4) = \int_0^4 Cm(Q)dQ$

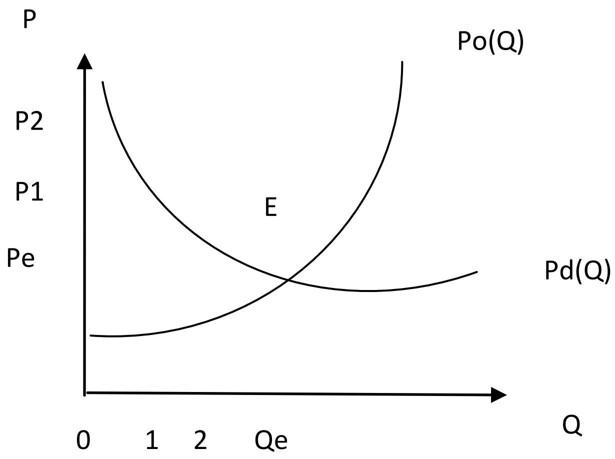
2-3- Le concept du surplus (explication l'équilibre du consommateur et de l'offre)

Les applications directes de l'intégration en économie sont souvent assez élémentaires .les exemples que nous allons en donner vont permettre de préciser certains points.

L'intégration permet de calculer la surface entre deux courbes

Considérons la fonction de la demande $P_d(Q)$ de demande d'un bien (P étant le prix qu'accepte de payer le consommateur en fonction des quantités demandées) et la fonction Po(Q) d'offre du même bien. la confrontation de l'offre et la demande donne naissance a un prix d'équilibre Pe et a une quantité d'équilibre Qe .

Le consommateur achète toutes les unités au prix Pe .or il était prêt a payer la première unité P1. Sur cette unité il gagne donc (P1-Pe) par rapport a ce qu'il était prêt à payer. De même il était prêt a payer la seconde unité P2 et ne la paye que Pe. Il gagne donc sur cette unité (P2-Pe) par rapport a ce qu'il était prêt à payer.



En considérons les quantités comme une variable continue .l ‘acheteur de Qe unité gagne donc par rapport a ce qu’il était prêt a payer, un montant égale a la surface grisée **(page 122)**

Cette surface S vaut S=$\int_0^{Qe} Pd(Q)dq$ - $\int_0^{Qe} Pe\ dQ$

Cette surface est comprise entre la fonction Pd(Q), la fonction constante Pe et les deux droite Q=0 et Q=Qe

Cette surface représente ce qu’on appelle en économie le surplus du consommateur, c’est –a-dire la différence entre ce qu’il était prêt a payer et ce qu’il paye effectivement.

Chapitre 04 : les fonctions à plusieurs variables

1- Généralités

1-1- **Définition :** Si on considère un sous ensemble D de R^n , une application F : D→R , est dite fonction réelle des p variables x1 , x2 ….Xp , on note : U=f(x1,x2……xn)

Il est donc possible d'envisager des fonctions, qui a deux ou plusieurs éléments de l'ensemble de départ, font correspondre un élément de l'ensemble d'arrivée. On note par exemple

$F(x,y,z)= 2x^2y-3xyz+4yz+8$

1-2- **Dérivées partielles d'une fonction à plusieurs variables :** F admet une dérivée partielle par rapport a x si la fonction d'une seule variable x→f(x,y,z…) est dérivable .sa dérivée est appelée dérivée partielle de f par rapport a x est noté **:**

$$\mathrm{F}f'x = f'x(x, y, z \ldots) = \frac{\delta f'(x,y,z \ldots..)}{\delta x}$$

Exemple : soit la fonction $z=f(x,y)= x^3+2x^2y+5+xy$. Il est possible de déterminer la dérivée partielle de cette fonction par rapport a la variable x en traitant la variable y comme une constante : $f'x = \frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 + 4xy + y$.

On détermine de même : $f'y = \frac{\delta z}{\delta y} = 2x^2 + x$

Remarque : de la même façon que précédemment, on peut étudier les dérivées par rapport a x de $f'_x(x,y)$ et de $f'_y(x,y)$. on définit ainsi les dérivées partielles secondes que l'on note :$f''_{x^2}(x,y)$ et $f''_{xy}(x,y)$

$$f''xx(x,y) = f''x^2(x,y) = \frac{\delta f'x(x,y)}{\delta x}$$

$$f''yy(x,y) = f''y^2(x,y) = \frac{\delta f'y(x,y)}{\delta y}$$

$$f''xy(x,y) = \frac{\delta f'x(x,y)}{\delta y}$$

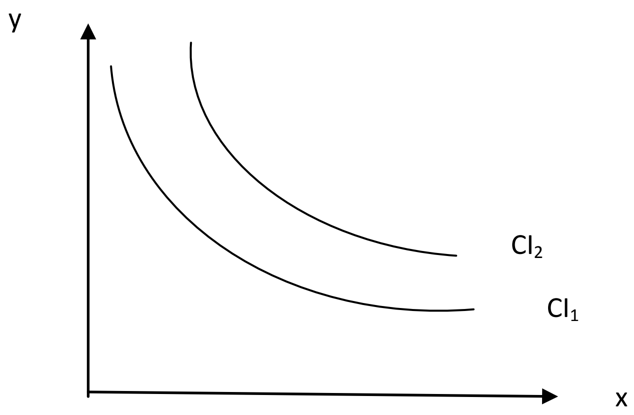
$$f''yx(x,y) = \frac{\delta f'y(x,y)}{\delta x}$$

2- Application des fonctions a plusieurs variables en économie

- **(les courbes d'indifférence) ;**
- **La fonction de production.**

2-1- **les courbe d'indifférences :** La théorie de l'utilité ordinale est une approche avancée par certain auteurs en récurrence PARETO et SAMUELSON , selon eux il n'est pas nécessaire de quantifier l'utilité mais simplement de pouvoir comparer et classer tout couple de situation possible (pour eux donc le classement est préférable a la quantification)

2-1-1- Définition : la courbe d'indifférence est les liens entre les points représentatifs des combinaisons de biens x et y donnant le même niveau d'utilité ou de satisfaction



Ensembles de courbe d'indifférences forme une carte d'indifférence.

2-1-2- Les propriétés des courbes d'indifférence :

- Les courbes d'indifférences ont généralement une pente négative ;
- Les courbes d'indifférence sont convexe par rapport a l'origine (le consommateur échange plus facilement les biens qu'il a en abondance que les bien qu'il a en petite quantité)

- Plus en s'éloigne de l'origine dans une direction donnée, plus le niveau de satisfaction est élevé, autrement dit toute courbe d'indifférence située au dessus et à droite d'une autre courbe prouve au consommateur une satisfaction plus élevée ;

- Les courbes d'indifférences ne se coupent jamais

2-1-3- le taux marginal de substitution technique (TMS) : le taux marginal de substituions des deux biens x et y (TMS xay) mesure la quantité du bien y que le consommateur doit renoncer pour obtenir une unité supplémentaire de x tout en gardant le même niveau de satisfaction.

Remarque : il n y a pas de prix pour les biens, le consommateur troque un bien contre un autre.

Autrement dit le taux marginal de substitution technique (TMS) correspond au rapport entre la variation de consommation de bien porté en ordonnée et la variation induite de consommation porté en abscisse , a satisfaction constante .

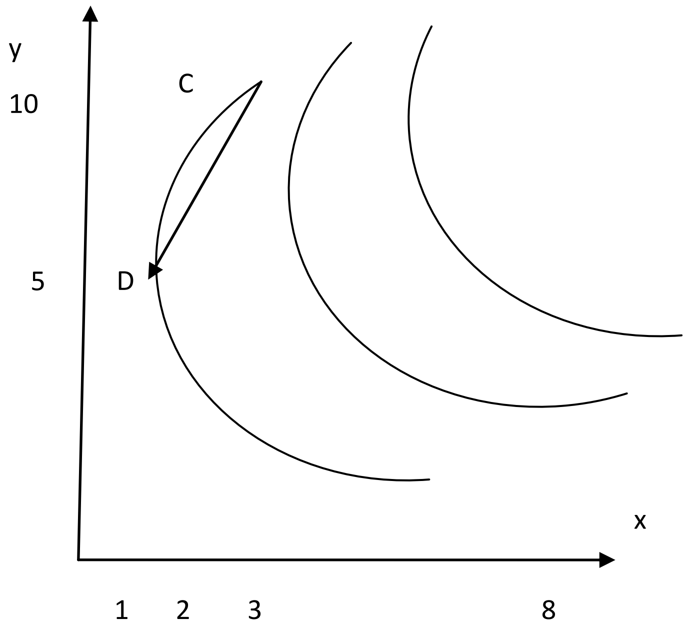
TMS = $\left|\frac{\Delta y}{\Delta x}\right|$

Le TMS mesure le rapport échangée de bien lorsqu'on passe d'un point a un autre sur la même courbe d'indifférence.

Mathématiquement : TMS xay = $\left|\lim \frac{\Delta y}{\Delta x}\right| = \frac{dy}{dx}$

Graphiquement le TMS_{xay} en un point a pour image la pente de la courbe d'indifférence.

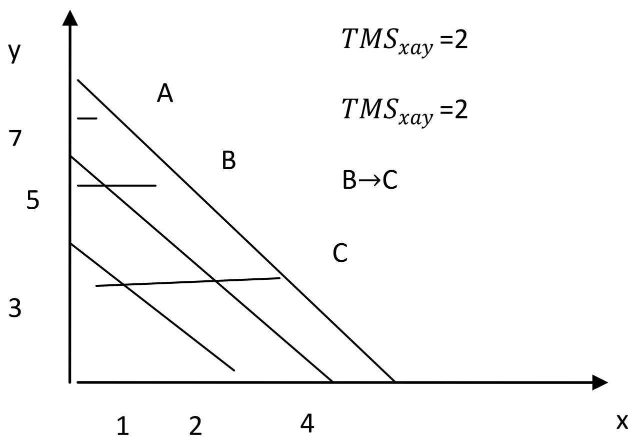
Exemple :



Selon les données de la figure lorsqu'on se déplace du point(c)vers le point(d) de la courbe d'indifférence (I), on abandonne cinq (5) unités de y pour avoir une unité supplementaire de x .

TMS say = $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{5-10}{2-1}$ =5

- **Le cas de deux biens (marchandises) complètement substituables :** On dit que deux biens (marchandises) x et y sont parfaitement (complètement) substituables si le TMS xay est constant, c'est-à-dire si nous plaçons sur n'importe quelle courbe d'indifférence et en quel point de cette courbe nous devons dans tous les cas céder la même quantité de y pour obtenir une unité supplémentaire de x



TMS xay $_{AaB}$= 2

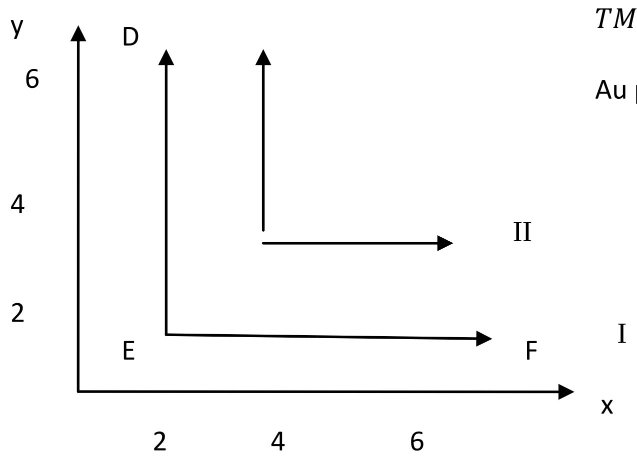
TMS xay$_{BaC}$ =2

Et si les courbes d'indifférences avaient en tout point une pente (-1) , alors le TMS xay = 1 , les deux biens sont non seulement substituables mais également s identiques.

- **Le cas de deux biens complètement complémentaires :** Deux biens x et y sont complètement complémentaire si

Le TMS x ay = TMS yax=0

Exemple



TMS_{xay} =TMS_{Yax} =0

Au point F =$TMS_{xay}\ = 0$

Les point D,E et F sont tous sur la courbe d'indifférence n°1 , cependant au point F, nous avons par rapport au point E une même quantité de y mais une quantité plus grande de x donc le consommateur atteint son point de saturation en (x) et ainsi TMSxay=0 , et au point F : TMSx ay=0.

Dans le point D est identique par rapport au point E (une même quantité de x mais une plus grande quantité de y , donc le consommateur atteint le point de saturation en y ou le TMS =0 ($\frac{\Delta y}{\Delta x} = 0$) / Δy=0.

2-1-4- La ligne de budget (la droite du budget)

Le consommateur lors de sa consommation des biens doit aussi tenir compte de son revenu (budget), et dan point, la notion de prix intervient. Le consommateur compare son revenu et ses dépenses qui ne peuvent pas accéder son revenu .

Définition 01 : la ligne du budget indique l'éventail de toutes les combinaisons différentes de deux biens x et y qu'un consommateur peut acheter en prenant compte de son budget et les prix des deux biens.

Définition 02 : la ligne de budget est le lien géométrique des points représentatifs des combinaisons des biens x et y tel que le budget dépensé pour les acquérir est constant.

L'équation de la ligne budgétaire : B = x Px + y PY tel que :

B : budget ;

X : les unités du bien x consommées ;

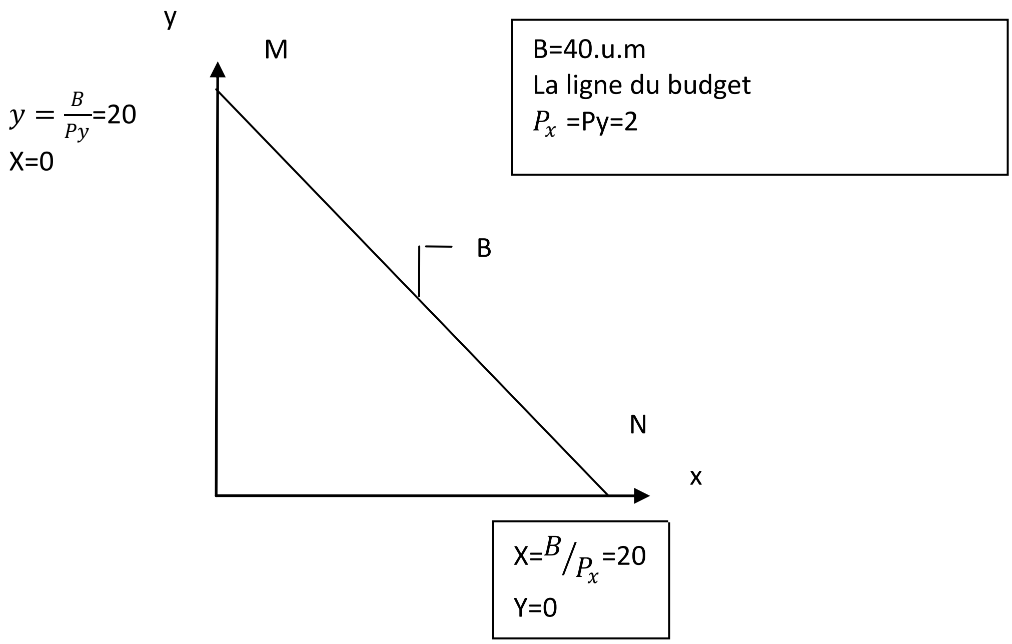
Px : le prix d'une seule unité de bien x ;

Y : les unités du bien y consommées ;

Py : le pris d'une seule unité de bien y.

- **La représentation graphique de la ligne de budget**

Exemple : Soient deux biens x et y consommés par un consommateur rationnel avec les prix de deux biens qui sont égaux Px=Py=2 um (unité mesurable), et le revenu du consommateur donné par unité te temps et qui est entièrement dépensé en achetant x et y et égal a 40 um.



On sait que la recherche maximum de satisfaction est l'objectif d'un consommateur rationnel, cette objectif est atteint seulement sous contrainte budgétaire.

- Si le consommateur dépense tout son argent pour acheter le bien y , il pourrait acheter 20 unités de ce bien (y=B/Py) qui est la quantité maximale de y , et a ce point x=o(le consommateur n'a pas consommé le bien x)
- Si le consommateur dépense entièrement son budget pour acheter x, il pourrait acheter (B/Px) unités de bien x , c'est-à-dire 20 unités de x qui est la quantité maximale de x et y =0, ce ci détermine le point N
- En joignant les point **M** et **N** on aura la droite de budget, cette droite indique toutes les combinaisons différentes de biens x et y que le consommateur peut avoir sous contrainte de son budget et les prix des deux biens.

On peut dire que la droite budgétaire joue un rôle frontière délimitant une zone de combinaisons possible de biens **x** et **y**, et une zone de combinaison impossible a atteindre avec le budget **B**.

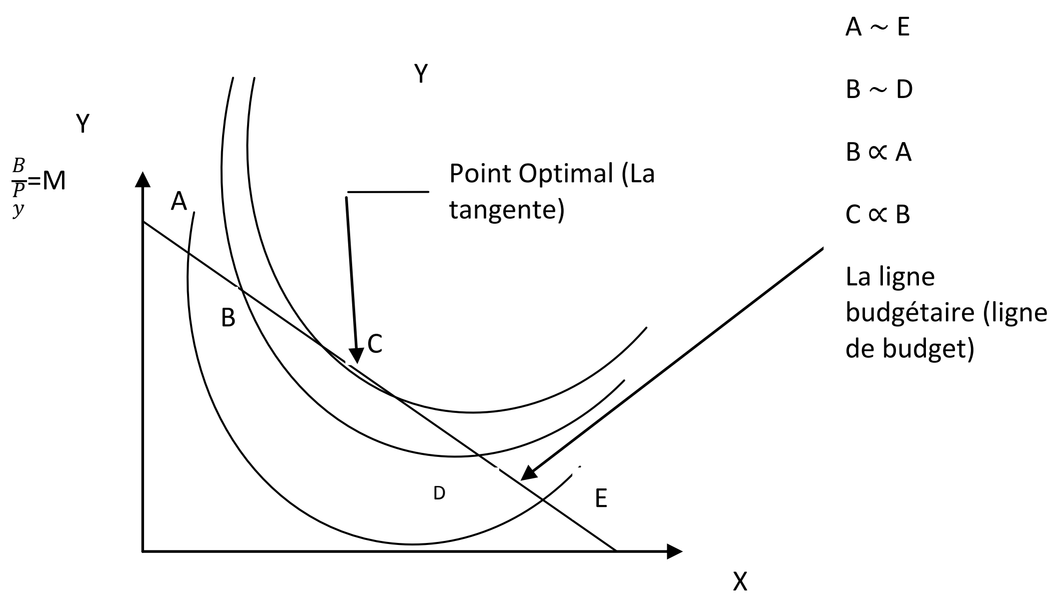
Les combinaisons $\mathbf{x_1}$ et $\mathbf{y_1}$ peuvent être obtenus avec le budget **B**.

Le point E est au dessus de budget, donc $\mathbf{x_E}$ et $\mathbf{y_E}$ ne peuvent pas être obtenus avec le budget B, et au dessous de la ligne budgétaire la combinaison $\mathbf{xp}$,$\mathbf{y_p}$ avec le budget B .

2-1-5- L'équilibre du consommateur un consommateur atteint une situation d'équilibre (optimale) lorsqu'il tire de ses dépenses la plus grande utilité ou satisfaction, il veut donc une combinaison située sur une courbe d'indifférence la plus élevée, et qui doit être dans sur sa ligne budgétaire.

Mathématiquement expliquant le choix optimal du consommateur correspond au point de tangente entre une courbe d'indifférence le plus élevée et sa droite budgétaire.

Exemple



Soit **MN** la droite budgétaire d'un consommateur rationnel, et sa carte d'indifférence formées de trois courbes.

- Etant donné le budget **(B)**, le consommateur peut choisir la combinaison **(A)** ou la combinaison **(E)** (car les deux points sont équivaut) ce choix est possible puisque les deux point appartiennent a la ligne du budget **(MN)** et a une courbe d'indifférence.
- Le consommateur peut choisir les combinaisons **(B)** et **(D)**, et sont préférables aux (**A) et (B)**, puisque la satisfaction est meilleure, cependant l'utilité n'est pas encore maximale.
- La courbe d'indifférence **(C_3)** est le plus élevée que le consommateur peut atteindre pour maximiser sa satisfaction, le point **(C)** représente la meilleure

combinaison possible que le consommateur peut atteindre, ce point est appelé le point d'équilibre ou le point optimal du consommateur.

- On remarque que (C) est le point ou la ligne budgétaire est tangente a la courbe d'indifférence la plus élevé (C3).
- Au point (C) la pente de la ligne budgétaire est la pente de la courbe d'indifférence (C3) c'est-à-dire : **-Px/Py**

Démonstration :

TMS= $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{B}{Py}}{\frac{B}{Px}} = -\frac{B}{Py} \cdot \frac{Px}{B} = -\frac{Px}{Py}$ (le signe – pour montrer la pente décroissante)

On sait qu'a la situation d'équilibre :

$\frac{UMX}{Px} = \frac{UMY}{Py}$ donc $\frac{UMX}{UMY} = \frac{Px}{Py} = \left|-\frac{Px}{Py}\right|$ (la valeur absolue de la pente au point c qui le point de l'optimum)

Donc la conditio, d'équilibre a l'optimum est **:** $\boldsymbol{\frac{UMX}{UMY} = \frac{Px}{Py}}$ **= TMS** $_{\mathbf{x\,a\,y}}$

2-1-6- Recherche de satisfaction maximale avec N biens : utilisation de la méthode de LAGRANGE :

Rappelant qu'en dépit du fait que les représentations graphiques constituent un mode d'analyse particulièrement efficace, elles contiennent leurs propres limites, le principal est qu'on ne peut représenter graphiquement plus de trois variables.et lorsque l'économiste se retrouve dans une telle situation ou les contrainte sont nombreuse , il fait appel a une technique plus efficace , c'est la méthode la plus connue pour déterminer le programme[1] de maximisation dans le cas du consommateur, est celle de la fonction, de LAGRANGE , cette méthode permet de trouver des valeurs : x_1 , x_2, x_3 , …jusqu'à x_n qui seront des solutions au problèmes de maximisation

Exemple : Soit la fonction d'utilité U a maximiser qui dépend de la consommation de n biens x_1 , x_2 …xn , et les prix de ces biens sont respectivement P_1 P_2 ….. Pn, le budget disponible est B

Pour maximiser l'utilité U sous contrainte budgétaire c'est-à-dire :

[1] On l'utilise aussi dans le programme de minimisation de couts chez le producteur

Max U= F(x_1, x_2,….xn)

s/c B= $\sum_{i=1}^{i=n}$ PiXi B=$Qx_1Px_1+Qx_2Px_2+\ldots\ldots+Qx_nPx_n$

- Rechercher de l'optimum (l'équilibre)

On pose la fonction de LAGRANGE

L= f(x1, x2……..xn) +λ (B-$\sum_{i=1}^{i=n}$ PiXi)

λ : est une variable supplémentaire appelé multiplicateur de LAGRANGE

- Pour la recherche de l'optimum de la fonction de l'utilité, il faut respecter les conditions qui sont obtenus par l'annulation de la différentielle totale primaire de la fonction (L), ces conditions sont appelés les conditions du premier ordre :

Les conditions du premier ordre :

$\frac{\delta L}{\delta x1}= 0 \Rightarrow \frac{\delta U}{\delta x1} - \lambda P_{x1}=0$ ………(1)

$\frac{\delta L}{\delta x2}= 0 \Rightarrow \frac{\delta U}{\delta x2} - \lambda P_{x2}=0$ ………(2)

.

.

$\frac{\delta L}{\delta xn}= 0 \Rightarrow \frac{\delta U}{\delta xn} - \lambda P_{xn}=0$ ………(n)

$\frac{\delta L}{\delta \lambda}= 0 \Rightarrow B-\sum_{i=1}^{i=n} Pixi =0$ ………(n+1)

- **Vérification du maximum : les conditions du 2 ^{eme} ordre**

Les conditions suffisantes pour que l'optimale soit au maximum sont appelées les conditions du deuxième ordre, et sont obtenues avec la différentielle seconde de la fonction de LAGRANGE suive par la recherche du déterminant (D) qui doit être supérieure a 0.

Exemple : soit la fonction d'utilité a maximisé par un consommateur rationnel c'est-à-dire

MAX U(x.y) =2xy , B=10um , Px=2um , Py=1um

Solution

MaxU(x.y) =2xy

S/C : B=10=2x+y

Recherche de l'optimum :

On pose la fonction de LAGRANGE : L(x,y,λ)=2xy+λ(10-2x-y)

$\frac{\delta L}{\delta x}$= 0 ⇒$2y - 2\lambda$ =0 ………(1)

$\frac{\delta L}{\delta y}$= 0 ⇒ 2x- λ=0 ………(2)

$\frac{\delta L}{\delta \lambda}$= 0⇒10-2x-y=0………..(3)

De l'équation (1) : 2y=2λ et de l'équation(2) : 2x=λ

$$\frac{(1)}{(2)} = \frac{2y}{2x} = \frac{2\lambda}{\lambda}$$

Par tâtonnement on a eu la condition d'équilibre suivante

$\frac{UMX}{UMY}$ =$\frac{Px}{Py}$ = TMS $_{x\,a\,y}$

On aura 2x=y et c'est la valeur du TMS

On remplace ce résultat dans l'équation (3) : 10 –y-y=0 ⇒10-2y=0⇒ y=5 et x=5/2

Alor l'utilité totale : U(5/2.5) =2 $\frac{5}{2}$ 5=25utiles.

Vérification du maximum :

Les conditions du2 ^{eme} ordre :

$\frac{\delta L}{\delta x}$ =$2y - 2\lambda$

$\frac{\delta L}{\delta y}$= 2x- λ=0

$\frac{\delta L}{\delta \lambda}$ =10-2x-y=0

$$\begin{bmatrix} L''xx = 0 & L''xy = 2 & L''x\lambda = -2 \\ L''yx = 2 & L''y\lambda = 0 & L''y\lambda = -1 \\ L''\lambda x = -2 & L''\lambda y = -1 & L''\lambda\lambda = 0 \end{bmatrix}$$

Cucul du déterminant

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 2 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$$

D=$[(0.0.0) + (2)(-1)(-2) + (-2)(2)(-1)]$–$[(-2)(0)(-2) + (0)(-1)(-1) + (2)(2)(0)]$

D=8>0 donc il s'agit d'un programme de maximisation

Exercice :

Soit la fonction de l'utilité U(x.y)=$\frac{1}{3}xy$ et le revenu du consommateur intégrant est 42 um , les prix des biens x et y sont respectivement Px= 1um et Py=3um

- Déterminer l'équilibre du consommateur (utilisez la méthode de LAGRANGE) ;
- Représenter graphiquement la situation optimale de ce consommateur.

Solution :

Max U(x.y)=$\frac{1}{3}xy$

S/B : B=42 =x+3y

On pose la fonction de LAGRANGE :

L=$\frac{1}{3}xy$+ λ (42-x-3y)

-condition du premier ordre :

L'_x =0 ⇒$\frac{1}{3}$ y-λ=0……(1)

L'_y =0 ⇒$\frac{1}{3}$ x-3λ=0……(2)

L'_λ =0 ⇒$42 - x - 3y$=0……(3)

$\frac{(1)}{(2)}=\frac{\frac{1}{3}y}{\frac{1}{3}x}=\frac{\lambda}{3\lambda}\Rightarrow\frac{y}{x}=\frac{1}{3}\Rightarrow$ 3y=x……(4)

On remplace le résultat (4) dans la fonction (3), on aura :

42-3y-3y=0 ⇒ 42-6y=0 ⇒ y=7

D'où x=21

Et l'utilité de ce consommateur est : U(21 ;7)=$\frac{1}{3}(21)(7)=49$

- Condition du 2 eme ordre : vérification du maximum

$$\begin{bmatrix} L''xx=0 & L''xy=1/3 & L''x\lambda=-1 \\ L''yx=1/3 & L''y\lambda=0 & L''y\lambda=-3 \\ L''\lambda x=-1 & L''\lambda y=-3 & L''\lambda\lambda=0 \end{bmatrix}$$

Calcul du déterminant :

$$\begin{bmatrix} 0 & 1/3 & -1 \\ 1/3 & 0 & -3 \\ -1 & -3 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1/3 \\ 1/3 & 0 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D}=\left[(\mathbf{0})(\mathbf{0})(\mathbf{0})+\left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}\right)(-\mathbf{3})(-\mathbf{1})+(-\mathbf{1})\left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}\right)(-\mathbf{3})\right]-\left[(-\mathbf{1})(\mathbf{0})(-\mathbf{1})+(\mathbf{0})(-\mathbf{3})(-\mathbf{3})+\left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}\right)\left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}\right)(\mathbf{0})\right]$$

D=2>0 donc le programme est un maximum

- **La représentation graphique de la situation d'équilibre**

Pour schématiser la situation optimale du consommateur il faut suivre les étapes suivantes :

- Représenter graphiquement la ligne budgétaire ;
- Déterminer le point d'équilibre qui doit être sur la ligne budgétaire ;
- Tracer une courbe d'indifférence pour laquelle la ligne budgétaire doit lui être une tangente au point d'équilibre.

2-2- La fonction de production :

La fonction de la production d'un bien est la relation entre des facteurs nécessaires pour produire ce bien, et le volume de production qui en résulte.

Mathématiquement : PT=Q(L.K)

PT : production totale ;

Q : quantité

L et K : facteurs de production, travail (L) et capital (K)

2-2-1- la fonction de production avec un seul facteur de production variable (processus de production a court terme)

On parle de la fonction de production a court terme ou ne courte période s'il existe un seul facteur de production variable.

$Q= f(L, K_0)$

K_0 : capital fixe

Remarque : à court terme, l'entreprise est incapable de modifier son capital. Donc la production dans ce processus est le résultat de l'utilisation d'un certain nombre d'unité de facteurs de travail (L) avec une quantité fixé de l'autre facteur qui est le capital.

- **La productivité moyenne (le produit moyen du facteur travail(PAL)**

La productivité moyenne ou bien le produit moyen du facteur travail est définie comme étant le produit d'une seule unité de travail, en langage mathématique c'est le produit total devisé per le nombre d'unités de travail utilisé.

PAL= Q/L

PAL : produit moyen du facteur travail ;

Q : la quantité totale produite

L : les unités de facteur travail utilisées.

- **Le produit marginal du facteur travail PML** :

C'est la variation du produit total (PT) correspondant à la variation unitaire de la quantité de (L) utilisée. Ou c'est l'accroissement de la production résultant de l'accroissement de l'unité supplémentaire de (L) utilisé.

$$PML = \frac{\Delta PT}{\Delta L}$$

Et si Q ou le produit total est une fonction continue et dérivable :

$$PML = \frac{\partial PT}{\partial L}$$

Exemple : soit un tableau donnant les informations selon la fonction de production agricole a court terme qui est le blé.

La main d'œuvre est mesurée par homme et par an

La main d'œuvre (facteur travail)	0 1 2 3 4 5 6 7 8
Le produit total	0 3 8 12 15 17 17 16 13

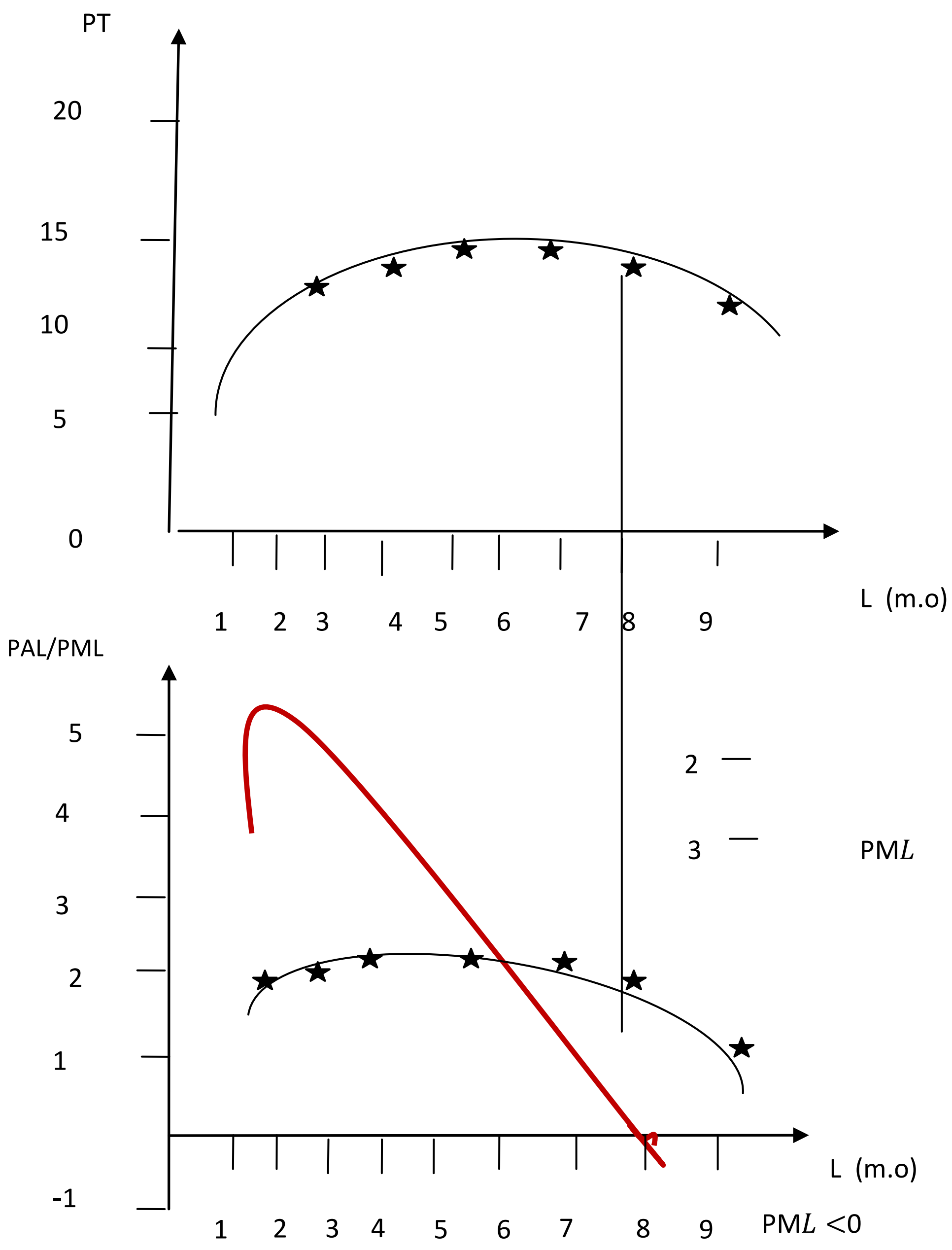
- Trouver les valeurs du produit moyen de la main d'œuvre et le taux marginal ;
- Représenter graphiquement les

Solution :

Facteur travail	Produit total	PAL(produit moyen du facteur travail)	PML(produit marginal du facteur travail)
0	0	/	/
1	3	3/1=3	3
2	8	8/2=4	$\frac{8-3}{2-1} = 5$
3	12	12/3=4	
4	15	15/4=3.75	4
5	17	17/5=3.4	3
6	17	17/6=2.83	
7	16	16/7=2.28	2
8	13	13/8=1.62	0

			-1 -3

La représentation graphique :



En général la courbe du produit moyen commence par accroitre jusqu'au maximum puis décroit, mais elle reste positive tant que la courbe du produit total est positive.

Le produit marginal du travail (PML) entre deux points de la courbe du produit total est égal a la pente de la courbe PT entre les points donnés.

La courbe PML , elle aussi commence par accroitre jusqu'au maximum (l'optimum) puis elle décroit , le PML devient nul quand le PT total est maximum , il devient négatif quand le produit total commence a diminuer .

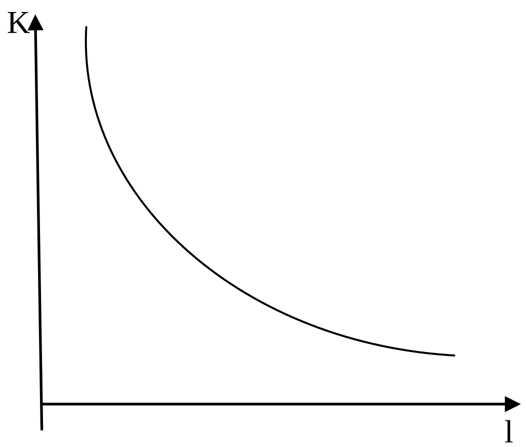
On peut donc déterminer trois phases de production concernant la main d'œuvre :

3- **Phase 01** : commence de 0 au point ou le produit moyen est maximum (03) ;
4- **Phase02** : elle va du point maximum du produit moyen jusqu'au point ou le produit marginal devient nul ;
5- **Phase03** : la ou le PML est négatif

2-2-2- La fonction de production a long terme (les isoquants)

Un isoquant représente des différentes combinaisons du facteur travail (L) et du facteur capital (K) avec lesquelles une entreprise peut fournir une production déterminée.

Un isoquant élevé indique une plus grande quantité de production finie, et un isoquant le moine levé indique une quantité petite



<u>les caractéristiques des isoquants</u> : les isoquants ont les mêmes caractéristiques que les courbes d'indifférences :

- Les isoquants ont une pente négatives ;
- Les isoquants sont convexes par rapport a l'origine des axes des coordonnées ;
- Les isoquants ne se coupent jamais.

- Le taux marginal de substitution technique (TMST)

Le taux marginal de substitution techniques mesure le nombre d'unités d'un facteur de production que l'on dois ajouter ou retrancher afin de maintenir le même niveau de production après avoir retrancher ou ajouter une unité de l'autre facteur de production .

Le TMST de L a K : Le TMST $_{LaK}$: indique le montant de capital que l'entreprise peut abandonner lorsqu'elle augmente d'une unité le montant du facteur travail (L) tout en restant sur le même isoquant (garder le même niveau de production)

$$TMST\ lak = \frac{\Delta K}{\Delta L}$$

C'est donc le taux au quel on peut échanger les facteurs de production tout en gardant le même niveau de production.

Bibliographie :

- **Alain Planche**, Mathématiques pour économistes, Dunod 1992,
- **André Ross**, Modèles mathématiques en gestion, Le griffon d'argile 1993
- **Azamoum Said,** Ccomprendre la microééconomie (cours et exercices), office des publications universitaires, Alger .2005.
- **Bouzou Nicolat,** Les mécanismes du marché : élément de microéconomie, édition Bréal, 2006.
- **Clotile Champeyrache, i**ntroduction générale a l'économie (microéconomie, macrroeconomie) , Ellipses Edition Marketing SA.2009.
- **Didier Schlacther,** comprendre la formulation mathématiques en économie
- **Franck.Ayres** , FHILIP Schmidt, Mathématiques de base , Schaum 1993
- **FILSER, M.** Le comportement du consommateur, Paris, Dalloz ,1994.
- **FREUND, J.** « Théorie du besoin », L'année sociologique, 3ème série 1970.
- **Samir Serairi**,Manuel de mathématique ; clé 1997.
- **Tahar Abdessalem**, Mathématiques en sciences économiques, Cerep 1989.