Module : mathématiques financières

Cours de 2ème année sciences économiques /section B

Chapitre3 : les opérations financières à long terme

Les intérêts composés

– ***Introduction : notion de capitalisation des intérêts***

Dans les chapitres qui ont précédé les calculs d'intérêt étaient effectués suivant la convention d'intérêt simple, c'est-à-dire que pendant toute la durée de l'opération de prêt, les calculs d'intérêt prenaient pour base le capital initialement prêté. Ce calcul se justifiait, les opérations financières en question étant des opérations à court terme, qui pouvaient ne durer que quelque dizaines de jours.

Quand l'opération de prêt est une opération à long terme, qui peut durer plusieurs années, il semble naturel que le préteur, à l'expiration d'une durée convenue avec l'emprunteur, l'année par exemple, considère l'intérêt simple fourni par son capital pendant cette année comme un nouveau capital qui, incorporé au capital initial, portera intérêt à son tour pendant l'année suivante.

Ainsi ***10.000 DA*** placés au taux annuel de ***10%***, donneront au cours de la première année ***1.000DA*** d'intérêt simple qui incorporés, à la fin de cette première année, au capital initial, porteront le capital placé à ***10000+1000=11000DA.***

C'est sur ce nouveau capital que sera calculé l'intérêt simple de la deuxième année de placement, intérêt qui sera égal, si le taux de placement reste fixé à ***10%***, à ***1100DA.***

L'incorporation de cet intérêt au capital portera le capital à ***11000+1100=12100DA***. Ce nouveau capital fournira, pendant la troisième année de placement, à 10% un intérêt de ***1210DA.*** En supposant que la durée du prêt ait été limitée à trois ans la valeur acquise finale du capital placé sera égale à ***12100+1210=13310DA***. C'est cette somme que l'emprunteur remettra à son préteur au bout des trois ans.

Un rapide calcul montrerait que si le prêt avait été stipulé à intérêt simple, c'est-à-dire sans incorporation au capital, à la fin de chaque année, de l'intérêt simple produit pendant l'année, l'emprunteur aurait rendu à son préteur :

$$10000 + \frac{10000 \times 10 \times 3}{100} = 13000DA$$

La capitalisation (c'est-à-dire l'addition au capital) des intérêts à la fin d'une durée convenue, dans notre exemple l'année, est la caractéristique du prêt à intérêt composé.

1. *Définition de l'intérêt composé :*

Les intérêts composés concernent les opérations financières à moyen et long terme ;

On dit qu'un capital ***« C »*** est placé à intérêt composé, lorsque le montant de l'intérêt est ajouté au capital à la fin de chaque période suivante, on parle alors de capitalisation des intérêts.

2. *Formule fondamentale des intérêts composés :*

Soit un capital ***« C »*** placé à intérêt composé au début de l'année et à un taux d'intérêt annuel ***« i ».*** Le principe de calcul est le suivant :

- La capitalisation des intérêts veut que la valeur acquise en fin d'année devienne le capital placé au début de l'année suivante ;
- Le montant de l'intérêt annuel résulte toujours du produit : capital placé au début de l'année ***X*** le taux d'intérêt annuel ;
- La valeur acquise en fin de l'année : ***capital placé au début de l'année + montant de l'intérêt annuel.***

Soit

C : Le montant du capital placé, exprimé en unité monétaire
n : La durée du placement, exprimée en années
i : Le taux d'intérêt pour une unité monétaire de capital et pour une durée de un an.
par exemple un taux annuel de 8% conduirait à écrire ***i=0,08***

On remarquera, avec les conventions qui sont ainsi faites, que l'intérêt simple, en un an, du capital « ***C*** », placé au taux annuel ***i*** pour une unité monétaire, est égal à $\boldsymbol{C \times i}$ unités monétaire.

Présentons, sous la forme d'un tableau, les opérations d'intérêt et de capitalisation annuelle des intérêts.

Date (années)	Capital au début de l'année	Intérêt de l'année en cours	Valeur acquise à la fin de l'année après capitalisation de l'intérêt de l'année	
1	C	$C \times i$	$C + C \times i$	$= C \times (1+i)^1$
2	$C(1+i)$	$C(1+i) \times i$	$C(1+i) + C(1+i) \times i$	$= C \times (1+i)^2$
3	$C(1+i)^2$	$C(1+i)^2 \times i$	$C(1+i)^2 + C(1+i)^2 \times i$	$= C \times (1+i)^3$
.	.	.	.	
.	.	.	.	
.	.	.	.	
n-1	$C(1+i)^{n-2}$	$C(1+i)^{n-2} \times i$	$C(1+i)^{n-2} + C(1+i)^{n-2} \times i$	$= C \times (1+i)^{n-1}$
n	$C(1+i)^{n-1}$	$C(1+i)^{n-1} \times i$	$C(1+i)^{n-1} + C(1+i)^{n-1} \times i$	$= C \times (1+i)^n$

Nous pourrons ainsi écrire que, dans les conditions données, la valeur acquise par le capital ***C***, donc après n capitalisations d'intérêt, valeur acquise que nous désignerons par $\boldsymbol{C_n}$ sera donnée par la formule :

$$\boldsymbol{Cn = C \times (1 + i)^n}$$

3. ***<u>Quelques remarques importantes</u>***

Remarque 1 : nous avons supposé pour établir la formule, valeur acquise $Cn = C \times (1+i)^n$, que la capitalisation des intérêts était annuelle, que le taux d'intérêt était annuel et que la durée de placement s'exprimait en années.

Taux de placement et durée de placement s'exprimeraient par référence à la période retenue pour la capitalisation des intérêts. Cette condition doit toujours être remplie pour que la formule soit applicable.

Si par exemple, il est convenu entre prêteur et emprunteur, que les intérêts doivent être capitalisés (incorporés au capital) à la fin de chaque mois, la formule fondamentale sera applicable à la condition que le taux d'intérêt soit mensuel, et que la durée de placement soit exprimée en mois.

Remarque 2 : Le tableau précédent montre (colonne4) que les valeurs acquises successives constatées à la fin des périodes 1,2,3…,n, après capitalisation des intérêts, sont en progression géométrique de raison ***(1+i),*** le premier terme de cette progression étant d'ailleurs le capital initial ***« C ».***

Remarque3 : Ce même tableau montre (colonne3) que les intérêts produits au cours des années 1,2,3,…,n, sont également en progression géométrique de même raison ***(1+i).***

Remarque4 : Contrairement aux formules relatives aux calculs d'intérêt simple qui donnaient directement l'intérêt fourni par un placement, la formule fondamentale en matière d'intérêt composé donne la valeur acquise par le capital placé.

On obtiendrait l'intérêt total produit en faisant la différence entre valeur acquise et capital initial.

$$intéret = Cn - C = C(1+i)^n - C$$

$$\underline{\boldsymbol{intéret = C[(1+i)^n - 1]}}$$

4. Exemples simples de calcul d'une valeur acquise

Exemple1 :
Un capital de ***70.000€*** est placé à intérêt composé au taux annuel de ***9%.***
- Quelle est la valeur acquise par ce capital au bout de ***sept ans*** ?
- Quel est le montant des intérêts générés au cours de cette période de sept ans ?

Solution :

C=70.000 ; i=9%=0,09 ; n=7ans

- La valeur acquise :$Cn = C \times (1+i)^n$

La valeur acquise au bout de 7 ans : $C7 = C \times (1+i)^7$

$C7 = 70.000 \times (1+0{,}09)^7$ $\boldsymbol{C7 = 127962{,}7384}$ €

- le montant des intérêts générés au cours de cette période de sept ans

$intéret = C7 - C = 127962{,}7384 - 70000$

$\boldsymbol{intéret = 57962{,}7384}$ €

Exemple2 :

Un capital de ***10.000€*** est placé à intérêt composé. Taux trimestriel d'intérêt : ***i=0,025*** pour un euro. Capitalisation trimestrielle des intérêts. Calculer sa valeur acquise au bout de ***6ans***.

Solution :

Pour exprimer la durée et le taux de placement par référence au trimestre qui est la période de capitalisation, la durée de placement sera exprimée en trimestres, soit 24 (un an fait 4 trimestres, alors 6ans faites 24 trimestres). Il y a d'ailleurs 24 capitalisations d'intérêt.

On pourra donc écrire :

$C24 = 10000 \times 1{,}025^{24} = 10000 \times 1{,}808726$

$\boldsymbol{C24 = 18087{,}26}€$

5. ***problèmes simples sur la forme fondamentale des intérêts composés :***

Rappelons la formule générale :

$$\boldsymbol{Cn = C \times (1 + i)^n}$$

Les calculs envisagés supposent l'emploi de calculatrice, ou de tables financières.

- **Problème 1 : Calcul de la valeur acquise**

Données : C=20.000€ Capitalisation annuelle des intérêts

Taux annuel i=9,5%

Valeur acquise C7= ?

Calcul :

$C7 = C \times (1 + i)^7$

$C7 = 20000 \times (1 + 0{,}095)^7$

$C7 = 37751{,}0321$ €

- **Problème 2 : calcul du taux**

Données : C=30.000€ Capitalisation annuelle des intérêts

n=11 ans Valeur acquise C_{11}=89 971,77€

Taux annuel de placement pour 1 Euro ?

Calcul :

$Cn = C \times (1 + i)^n$

$(1 + i)^n = \frac{Cn}{C}$

$(1 + i)^{11} = \frac{89971{,}77}{30000}$

$(1 + i)^{11} = 2{,}999059$

$(1+i) = \sqrt[11]{2,999059}$

$(1+i) = 1,1049999$

$i = 0,1049999$

$\boldsymbol{i = 10,50\%}$

En utilisant la table financière :

La durée **11** étant connue il suffit de chercher, dans la table financière n°1, sur la ligne **11** le nombre **2,999059** qui se trouve dans la colonne correspondant au taux **10,5% ;**

- **Problème3 : recherche de la durée de placement**

Données : C=40.000€ Capitalisation semestrielle des intérêts

Taux semestriel d'intérêt : 4,75% ou i=0,0475

Cn=76597,84€

Durée de placement, exprimée en semestres, n= ?

Calcul :

$Cn = C \times (1+i)^n$

$(1+i)^n = \frac{Cn}{C}$

$log(1+i)^n = log\frac{Cn}{C}$

$n \times log(1+i) = log\frac{Cn}{C}$

$\boldsymbol{n} = \frac{log\frac{Cn}{C}}{log(1+i)}$

$\boldsymbol{n} = \frac{log\frac{76597,84}{40000}}{log(1+0.0475)}$

$n = \frac{log\ 1,914946}{log\ 1.0475} = \frac{0,28215653}{0,02015403}$

$\boldsymbol{n = 14,0000}$

En utilisant la table financière n°1 :

Le taux de 0.0475 étant connu on cherche dans la table financière n°1, colonne 4,75% le nombre 1,914946, que l'on trouve sur la ligne correspondant à n= 14 semestres

- **Problème 4 : recherche du capital placé**

Données : n=10ans Capitalisation annuelle des intérêts

C10= 123661,92 Taux annuel : i=0.075

Capital placé, C= ?

Calcul :

$$Cn = C \times (1+i)^n$$

$$C = \frac{Cn}{(1+i)^n}$$

$$C = \frac{123661,92}{(1+0.075)^{10}} = \frac{123661,92}{2,061031} = 60000€$$

6. Calculs sur la formule fondamentale des intérêts composés. Calcul de la valeur acquise dans le cas d'un nombre de périodes non entier

- **Problème :**

Un capital de 20.000€ est placé à intérêt composé. Capitalisation annuelle des intérêts. Taux de placement i=0,11 (11%). Durée de placement : 7ans et 3mois. Calculer la valeur acquise par le capital à l'expiration de la durée prévue.

- **Résolution :**

On calcule la valeur acquise par le capital placé au bout de 7 années de placement (7 est le nombre entier de périodes de placement immédiatement inférieur à la durée exacte du placement), puis on ajoute à cette valeur acquise l'intérêt simple qu'elle produira pendant 3 mois (ou $\frac{3}{12}$ d'année). On remarquera que le calcul fait à intérêt simple n'a rien d'illogique, la capitalisation des intérêts n'intervenant qu'en fin de période.

Ainsi :

$$C7 = 20000 \times (1+0,11)^7 = 20000 \times 1,11^7 = 20000 \times 2,07616$$
$$= 41523,20€$$

$$C7 + C\ mois = 41523,20 + \left(41523,20 \times \frac{11}{100} \times \frac{3}{12}\right) = 42665,09€$$

La valeur acquise dans 7ans et 3 mois est : 42665,09€

7. Taux équivalents et taux proportionnels :

- **Taux équivalents :**

Un capital ***C*** est placé à intérêt composé au taux annuel ***i***, pendant n années. Capitalisation annuelle des intérêts. A l'expiration des n années sa valeur acquise sera $Cn = C \times (1+i)^n$. Supposons maintenant que ce même capital C soit placé au taux semestriel « i_2 », pendant la même durée que dans la première hypothèse soit $(2 \times n)\, semestres$ les intérêts produits étant capitalisés semestriellement.

Au bout des$(2 \times n)\, semestres$ la valeur acquise par le capital C sera $Cn = C \times (1 + i2)^{2n}$. Si dans lees deux hypothèses envisagées les deux valeurs acquises sont égales entre elles, c'est-à-dire si $(1 + i)^n = (1 + i2)^{2n}$, o, dira que les taux i(annuel) et $\boldsymbol{i_2}$ (semestriel) sont équivalents.

D'une façon générale deux taux :

I, que l'on supposera annuel,

i_k, attaché à une période K fois plus faible que l'année, seront dits équivalents si, appliqués à un même capital, et après l'écoulement d'une même durée, ils conduisent à une même valeur acquise, la capitalisation des intérêts étant annuelle dans le premier cas, effectuée à la fin de chaque année K^e d'année dans le second cas.

Ainsi :

- Capital C, taux annuel i, capitalisation annuelle, n années de placement donc n capitalisations.
- Capital C, taux i_k , capitalisation à la fin de chaque K^e d'année, n années de placement donc $K \times n$ capitalisations.
  i et i_k seront équivalents si :

$$C \times (1 + i)^n = C \times (1 + \mathrm{ik}\,)^{k \times n}$$
$$(1 + i)^n = (1 + \mathrm{ik}\,)^{k \times n}$$
$$(1 + i) = (1 + \mathrm{ik}\,)^{k}$$

- **Exemples de calcul de taux équivalents :**

Exemple1 :

Calcul du taux semestriel équivalent au taux annuel i=0,095 (k=2)

On écrira $(1 + i2)^2 = 1{,}095$

$(1 + i2) = 1{,}095^{\frac{1}{2}}$

$i2 = 1{,}095^{\frac{1}{2}} - 1 = 1{,}04642 - 1 = 0{,}04642$

Soit : $\boldsymbol{i2 = 4,64}\%$

Exemple2 :

Calcul du taux mensuel équivalent au taux trimestriel 0,07. Les deux taux, mensuel $\boldsymbol{i_{12}}$ et trimestriel $\boldsymbol{i_4}$ sont équivalents à un même taux annuel $\boldsymbol{i}$.

On peut donc écrire :

$(1 + i12)^{12} = (1 + i4)^4$

$(1 + i12) = (1 + i4)^{\frac{4}{12}}$

$(1 + i12) = (1{,}07)^{\frac{4}{12}}$

$(1 + i12) = 1{,}02281$

$i12 = 0{,}02281$

Soit : $\boldsymbol{i12 = 2,281}\%$

Exemple3 :

Calcul du taux semestriel équivalent au taux mensuel 0,015.

$(1 + i2)^2 = (1 + i12)^{12}$
$(1 + i2) = (1 + i12)^{\frac{12}{2}}$
$(1 + i2) = (1 + 0{,}015)^6$
$(1 + i2) = 1{,}015^6$
$(1 + i2) = 1{,}093443$
$i2 = 0{,}093443$
Soit : $\boldsymbol{i2 = 9,34}\%$

- <u>**Taux proportionnels**</u>

On écrira $\frac{i}{k}$ le taux proportionnel annuel i, et relatif à une durée k fois plus petite que l'année.

Ainsi le taux trimestriel au taux annuel i=0,08 est $\frac{0{,}08}{4} = 0{,}02$

Remarque :

- Nous observons qu'avec un taux annuel i=12%, le taux trimestriel équivalent (2,8737 %) est inférieur au taux semestriel proportionnel (3%). Et cette constatation peut être généralisée ;
- Le taux équivalent $\boldsymbol{i_k}$ est inférieur au taux proportionnel $\frac{i}{k}$ du fait de la capitalisation des intérêts générés par $\boldsymbol{i_k}$ au cours de l'année.

8. Valeur actuelle commerciale (VAC) :

Si je place un capital ***C*** à intérêt composé au taux ***i*** pendant ***n*** périodes, la valeur acquise sera $Cn = C \times (1 + i)^n$

Si, on connait cette valeur acquise, je me demande dans les mêmes conditions de placements, combien vaut aujourd'hui ce que je toucherai dans ***n*** périodes.

Exemple :

Deux personnes A et B doivent recevoir 10000€ le 01/01/2016. Combien recevraient-elles si elles étaient payées le 01/01/2011 en tenant compte d'un taux d'intérêt composé de 8% ?

Solution :

Il faut actualiser les 10000€ au 01/01/2011, donc soit une période de 5ans.

$C2016 = 10000€$

$C2011 = 10000 \times 1{,}08^{-5} = 10000 \times 0{,}680583$

$\boldsymbol{C2011 = 6805{,}83€}$

Annexe : table financière N°1 : $(1+i)^n$

TF N°1 : Valeur acquise par un capital de 1 € après n périodes de placement à intérêts composés $C_n = C_0 x (1+i)^n$

n \ t	1	2	3	4	4,5	5	5,5	6	6,5	7	7,5	8	8,5	9	9,5	10	10,5	11	11,5	12
1	1,010000	1,020000	1,030000	1,040000	1,045000	1,050000	1,055000	1,060000	1,065000	1,070000	1,075000	1,080000	1,085000	1,090000	1,095000	1,100000	1,105000	1,110000	1,115000	1,120000
2	1,020100	1,040400	1,060900	1,081600	1,092025	1,102500	1,113025	1,123600	1,134225	1,144900	1,155625	1,166400	1,177225	1,188100	1,199025	1,210000	1,221025	1,232100	1,243225	1,254400
3	1,030301	1,061208	1,092727	1,124864	1,141166	1,157625	1,174241	1,191016	1,207950	1,225043	1,242297	1,259712	1,277289	1,295029	1,312932	1,331000	1,349233	1,367631	1,386196	1,404928
4	1,040604	1,082432	1,125509	1,169859	1,192519	1,215506	1,238825	1,262477	1,286466	1,310796	1,335469	1,360489	1,385859	1,411582	1,437661	1,464100	1,490902	1,518070	1,545608	1,573519
5	1,051010	1,104081	1,159274	1,216653	1,246182	1,276282	1,306960	1,338226	1,370087	1,402552	1,435629	1,469328	1,503657	1,538624	1,574239	1,610510	1,647447	1,685058	1,723353	1,762342
6	1,061520	1,126162	1,194052	1,265319	1,302260	1,340096	1,378843	1,418519	1,459142	1,500730	1,543302	1,586874	1,631468	1,677100	1,723791	1,771561	1,820429	1,870415	1,921539	1,973823
7	1,072135	1,148686	1,229874	1,315932	1,360862	1,407100	1,454679	1,503630	1,553987	1,605781	1,659049	1,713824	1,770142	1,828039	1,887552	1,948717	2,011574	2,076160	2,142516	2,210681
8	1,082857	1,171659	1,266770	1,368569	1,422101	1,477455	1,534687	1,593848	1,654996	1,718186	1,783478	1,850930	1,920604	1,992563	2,066869	2,143589	2,222789	2,304538	2,388905	2,475963
9	1,093685	1,195093	1,304773	1,423312	1,486095	1,551328	1,619094	1,689479	1,762570	1,838459	1,917239	1,999005	2,083856	2,171893	2,263222	2,357948	2,456182	2,558037	2,663629	2,773079
10	1,104622	1,218994	1,343916	1,480244	1,552969	1,628895	1,708144	1,790848	1,877137	1,967151	2,061032	2,158925	2,260983	2,367364	2,478228	2,593742	2,714081	2,839421	2,969947	3,105848
11	1,115668	1,243374	1,384234	1,539454	1,622853	1,710339	1,802092	1,898299	1,999151	2,104852	2,215609	2,331639	2,453167	2,580426	2,713659	2,853117	2,999059	3,151757	3,311491	3,478550
12	1,126825	1,268242	1,425761	1,601032	1,695881	1,795856	1,901207	2,012196	2,129096	2,252192	2,381780	2,518170	2,661686	2,812665	2,971457	3,138428	3,313961	3,498451	3,692312	3,895976
13	1,138093	1,293607	1,468534	1,665074	1,772196	1,885649	2,005774	2,132928	2,267487	2,409845	2,560413	2,719624	2,887930	3,065805	3,253745	3,452271	3,661926	3,883280	4,116928	4,363493
14	1,149474	1,319479	1,512590	1,731676	1,851945	1,979932	2,116091	2,260904	2,414874	2,578534	2,752444	2,937194	3,133404	3,341727	3,562851	3,797498	4,046429	4,310441	4,590375	4,887112
15	1,160969	1,345868	1,557967	1,800944	1,935282	2,078928	2,232476	2,396558	2,571841	2,759032	2,958877	3,172169	3,399743	3,642482	3,901322	4,177248	4,471304	4,784589	5,118268	5,473566
16	1,172579	1,372786	1,604706	1,872981	2,022370	2,182875	2,355263	2,540352	2,739011	2,952164	3,180793	3,425943	3,688721	3,970306	4,271948	4,594973	4,940791	5,310894	5,706869	6,130394
17	1,184304	1,400241	1,652848	1,947900	2,113377	2,292018	2,484802	2,692773	2,917046	3,158815	3,419353	3,700018	4,002262	4,327633	4,677783	5,054470	5,459574	5,895093	6,363150	6,866041
18	1,196147	1,428246	1,702433	2,025817	2,208479	2,406619	2,621466	2,854339	3,106654	3,379932	3,675804	3,996019	4,342455	4,717120	5,122172	5,559917	6,032829	6,543553	7,094922	7,689966
19	1,208109	1,456811	1,753506	2,106849	2,307860	2,526950	2,765647	3,025600	3,308587	3,616528	3,951489	4,315701	4,711563	5,141661	5,608778	6,115909	6,666276	7,263344	7,910838	8,612762
20	1,220190	1,485947	1,806111	2,191123	2,411714	2,653298	2,917757	3,207135	3,523645	3,869684	4,247851	4,660957	5,112046	5,604411	6,141612	6,727500	7,366235	8,062312	8,820584	9,646293

1/2

i / n	12,5	13	13,5	14	14,5	15	15,5	16	16,5	17	17,5	18	18,5	19	19,5	20
1	1,125000	1,130000	1,135000	1,140000	1,145000	1,150000	1,155000	1,160000	1,165000	1,170000	1,175000	1,180000	1,185000	1,190000	1,195000	1,200000
2	1,265625	1,276900	1,288225	1,299600	1,311025	1,322500	1,334025	1,345600	1,357225	1,368900	1,380625	1,392400	1,404225	1,416100	1,428025	1,440000
3	1,423828	1,442897	1,462135	1,481544	1,501124	1,520875	1,540799	1,560896	1,581167	1,601613	1,622234	1,643032	1,664007	1,685159	1,706490	1,728000
4	1,601807	1,630474	1,659524	1,688960	1,718787	1,749006	1,779623	1,810639	1,842060	1,873887	1,906125	1,938778	1,971848	2,005339	2,039255	2,073600
5	1,802032	1,842435	1,883559	1,925415	1,968011	2,011357	2,055464	2,100342	2,146000	2,192448	2,239697	2,287758	2,336640	2,386354	2,436910	2,488320
6	2,027287	2,081952	2,137840	2,194973	2,253372	2,313061	2,374061	2,436396	2,500089	2,565164	2,631644	2,699554	2,768918	2,839761	2,912108	2,985984
7	2,280697	2,352605	2,426448	2,502269	2,580111	2,660020	2,742041	2,826220	2,912604	3,001242	3,092182	3,185474	3,281168	3,379315	3,479969	3,583181
8	2,565785	2,658444	2,754019	2,852586	2,954227	3,059023	3,167057	3,278415	3,393184	3,511453	3,633314	3,758859	3,888184	4,021385	4,158563	4,299817
9	2,886508	3,004042	3,125811	3,251949	3,382590	3,517876	3,657951	3,802961	3,953059	4,108400	4,269144	4,435454	4,607498	4,785449	4,969482	5,159780
10	3,247321	3,394567	3,547796	3,707221	3,873066	4,045558	4,224933	4,411435	4,605314	4,806828	5,016244	5,233836	5,459885	5,694684	5,938531	6,191736
11	3,653236	3,835861	4,026748	4,226232	4,434660	4,652391	4,879758	5,117265	5,365191	5,623989	5,894087	6,175926	6,469964	6,776674	7,096545	7,430084
12	4,109891	4,334523	4,570359	4,817905	5,077686	5,350250	5,636166	5,936027	6,250447	6,580067	6,925552	7,287593	7,666907	8,064242	8,480171	8,916100
13	4,623627	4,898011	5,187358	5,492411	5,813950	6,152788	6,509772	6,885791	7,281771	7,698679	8,137524	8,599359	9,085285	9,596448	10,134044	10,699321
14	5,201580	5,534753	5,887651	6,261349	6,656973	7,075706	7,518787	7,987518	8,483263	9,007454	9,561590	10,147244	10,766063	11,419773	12,110182	12,839185
15	5,851778	6,254270	6,682484	7,137938	7,622234	8,137062	8,684199	9,265521	9,883002	10,538721	11,234869	11,973748	12,757784	13,589530	14,471668	15,407022
16	6,583250	7,067326	7,584619	8,137249	8,727458	9,357621	10,030250	10,748004	11,513697	12,330304	13,200971	14,129023	15,117974	16,171540	17,293643	18,488426
17	7,406156	7,986078	8,608545	9,276464	9,992940	10,761264	11,584938	12,467685	13,413457	14,426456	15,511141	16,672247	17,914800	19,244133	20,665903	22,186111
18	8,331926	9,024268	9,770696	10,575169	11,441916	12,375454	13,380604	14,462514	15,626678	16,878953	18,225590	19,673251	21,229038	22,900518	24,695754	26,623333
19	9,373417	10,197423	11,089740	12,055693	13,100994	14,231772	15,454598	16,776517	18,205080	19,748375	21,415068	23,214436	25,156410	27,251616	29,511426	31,948000
20	10,545094	11,523088	12,586855	13,743490	15,000618	16,366537	17,850060	19,460759	21,208918	23,105599	25,162705	27,393035	29,810345	32,429423	35,266154	38,337600