Chapitre 1 : **Progression arithmétique et géométrique « en guise d'introduction »**

Module : mathématiques financières

Cours de 2ème année sciences économiques /section B

Chapitre1 : progression arithmétique et géométrique « en guise d'introduction »

I. Progression Arithmétique :

1. **Définition:** une suite arithmétique est une suite de nombre tel que pour passer d'un terme au suivant on ajoute toujours un nombre constant appelé raison.

   Exemple :

   Soient les nombres suivants: 3, 8, 13, 18, 23

   (8-3)= (13-8)= (18-13)= (23-18)= 5 → la raison de la progression

   Toute progression est caractérisée par trois éléments : le premier terme U_1= 3, la raison r =5, et le nombre de termes n= 5

2. **Propriétés :**
   - Le premier terme U_1
   - Le second terme $U_2 = U_1 + r$
   - Le troisième terme $U_3 = U_2 + r$

     $= (U_1 + r) + r$

     $= U_1 + 2r$

   - D'une façon générale : le n^{ème} terme est :

$$\boxed{U_n = U_1 + (n-1) \times r}$$

- Si le premier terme est U_0

$$\boxed{U_n = U_0 + n \times r}$$

3. **Détermination de la somme des n premiers termes d'une progression arithmétique : S_n**

   On a : $S_n = U_1 + U_2 + U_3 + U_4 \ldots . U_n$

$S_n = U_1+[U_1+r] +[U_1+2r]+\ldots+[U_1+(n-2)r]+ [U_1+(n-1)r]$

$S_n=[U_1+(n-1)r]+[U_1+(n-2)r]+[U_1+(n-3)r]+\ldots+[U_1+r]+U_1$

$2S_n= [2U_1+(n-1)r]+ [U_1+(n-1)r]+ [U_1+(n-1)r]+\ldots.+ [U_1+(n-1)r]+ [U_1+(n-1)r]$

$2S_n= [U_1+(n-1)r]n$ puisque : $(n-1)r = U_n$

$2S_n= [U_1+U_n]n \rightarrow$

$$\boxed{S_n= \frac{U1+Un}{2} \times n}$$

Exemple 1:

Soit une progression arithmétique suivante : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, …n

Il s'agit d'une progression arithmétique de premier terme 1, de raison 1 et de n termes.

$S_n= [U_1+U_n]n/2$

Déterminer la somme des 25 premiers termes ?

Solution :

La somme de 25 premiers termes peut se calculer comme suit :

$$\left.\begin{array}{l} U_{1=1} \\ U_{n=25} \\ n=25 \end{array}\right\} \longrightarrow S_n=(1+25)\text{x } 25/2=325$$

Exemple 2:

Le forage d'un puits a coûté 2500 DA pour le premier mètre, le coût du deuxième mètre est de 4000 DA, le troisième est de 5500 DA, le quatrième est de : 7000 DA…

- Déterminer la raison de la progression ?
- Quelle est la profondeur du puits si le coût total du forage de ce puits est de: 365 000 ?

Solution :

$U_1=2500$; $U_2= 4000$; $U_3=5500$; $U_4=7000$

- Pour déterminer la raison de cette progression, on doit calculer :

U_2-U_1= 4000-2500= 1500

U_3-U_2= 5500-4000=1500

U_4-U_3=7000-5500=1500

Alors : il s'agit d'une progression arithmétique car, r= (U_2-U_1) =(U_3-U_2)=(U_4-U_3)=1500

- Pour trouver la profondeur du puits il faut trouver le nombre de mètres, parce que le coût de forage du puits dépond de nombre de mètres de profondeur

  Le cout total du forage =367500DA

  Le cout total de forage= la somme des couts de forage de chaque mètre de profondeur

  Le cout total de forage= (U_1+U_n) × n /2

  Alors : 367500= U_1+(U_1+(n-1)r) × n/2

  735000=($2U_1$ +(n-1)r)× n

  735000= (5000+(n-1)×1500)×n

  735000=(5000+1500n-1500)×n

  735000=$1500n^2$+3500n

  $1500n^2$+3500n-735000=0

- Pour trouver le nombre de terme (la profondeur de puits) il faut résoudre l'équation de 2ème degrés.

  $1500n^2$+3500n-735000=0 (calculer Δ)

  $\Delta=b^2-4ac$

  $\Delta=3500^2- 4\times1500\times(-735000)$

  Δ=4422250000

  √Δ=66500

$$n = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$n = \frac{-3500 \pm 66500}{3000}$$

$$n = 21$$

$$n = -23.33$$

Alors n=21 mètres

La profondeur de ce puits est de 21 mètres

II. Progression Géométrique

1. **Définition :** Une suite de nombres constitue une progression géométrique si le Rapport entre 2 nombres consécutifs est une constante : La raison de la progression.(q)

Exemple :

- Soit la suite des nombres suivante :
- 3, 12, 48, 192, 768
- Est-ce que c'est une progression géométrique ?
- Si oui, Déterminer sa raison ?

Solution :

$U_1=3$

$\frac{U2}{U1} = \frac{12}{3} = 4 \rightarrow U_2=U1\times4$

$\frac{U3}{U2} = \frac{48}{12} = 4 \rightarrow U_3=U_2\times4= U_1\times4\times4=U_1\times4^2$

$\frac{U4}{U3} = \frac{192}{48} = 4 \rightarrow U_4=U_3\times4=U_1\times4^2\times4=U_1\times4^3$

$\frac{U5}{U4} = \frac{768}{192}=4 \rightarrow U_5=U_4\times4= U_1\times4^3\times4=U_1\times4^4$

Le suite de nombres 3,12,48,192,768 est une progression géométrique de premier terme $U_1=3$ et la raison q=4

2. Propriétés :

$1^{èr}$ termeU_1

2ème terme U_2 = U1 q.

3ème terme $U_3 = U_2\, q = U_2\, q^2$.

D'une façon générale : $\boxed{Un = U_1 \times q^{n-1}}$

3. Détermination de la somme de n premiers termes d'une progression géométrique : S_n

On a : $S_n = U_{1+} U_{2+} U_{3+} \ldots\ldots U_{n-1+} U_n$

$S_n = U_1 + U_1\, q + U_1\, q^2 + \ldots\ldots + U_1\, q^{(n-1)}$.

$S_n = U_1\, (q^0 + q^1 + q^2 + \ldots\ldots + q^{n-1)}$

$$\boxed{Sn = U1 \frac{(1-q)^n}{1-q}}$$

Exemple:

- Calculer le 10ème terme d'une progression géométrique dont le premier terme est de 5 et la raison est égale à 2 ?
- Calculer la somme d'une progression géométrique sachant la raison est : 4, le premier terme est : 4 est le nombre de terme est de : 11 ?

Solution :

- U1=5 ; q=2 ;
  $U10 = U1 \times q^{9-1}$
  $U10 = 5 \times 2^8$
  U10=1280
- q=4 ; U1=4 ; n=11

$$Sn = U1 \frac{(1-q)^n}{1-q}$$

$$Sn = 4 \times \frac{(1-4)^{11}}{1-4}$$

Sn=236196

4. Sens de variation d'une progression géométrique

Le sens de variation d'une progression géométrique dépond de la valeur de sa raison « q » :

- **Si $q<0$** ↔La progression géométrique sera alternée (la n'a pas de sens de variation)
- **Si $q=0$** ↔La progression géométrique dont U1= une constante et les autres termes seront nuls
- **Si $0<q<1$** ↔La progression géométrique sera décroissante
- **Si $q=1$** ↔La progression géométrique sera constante
- **Si $q>1$** ↔La progression géométrique sera croissante

Exemple :

On suppose que chaque année la production d'une usine subit une baisse de 4% . Au cours de l'année 2001 la production a été de 25000unités .on note $U_1=25000$ et U_n la production prévue au cours de l'année 2000+n

1. Montrer que (Un) est une suite géométrique dont on donnera la raison.
2. Calculer U_6
3. Si la production descend au-dessous de 15000unités, l'usine sera en faillite, quand cela risque-t-il d'arriver si la baisse de 4% par année, persiste?

Solution :

1. On a :

$U_1=25000$

$U_2=U_1-0.04U_1= U_1\times(0.96)$

$U_3=U_2-0.04U_2=U_2\times(0.96)=U_1\times(0.96)\times(0.96)=U_1\times(0.96)^2$

$U_4=U_3-0.04U_3=U_3\times(0.96)=U_1\times(0.96)^2\times(0.96)=U_1\times(0.96)^2$

Alors on peut écrire Un en fonction de U_1 :

$U_n=U_1\times(0.96)^{n-1}$

On peut dire que Un est une progression géométrique dont la raison q=0.96 et le premier terme $U_1=25000$

$$\boxed{\mathbf{Un=25000\times(0.96)^{n-1}}}$$

2. Calcul de U_6

$U_6= U_1\times0.96^{6-1}=25000\times0.96^5$

$$\boxed{U_6=20384.31744}$$

3. En quelle année l'usine sera en faillite ;Si Un < 15000

$U_n= 25000\times(0.96)^{n-1}$

$15000=25000\times(0.96)^{n-1}$

$0.96^{n-1}= 0.6$

$\text{Log } 0.96^{n-1}=\text{Log}0.6$

$n\text{-}1 \text{ Log } 0.96=\text{Log}0.6$

$n\text{-}1=\frac{\text{Log } 0.6}{\text{Log } 0.96}$

$n\text{-}1= \frac{-0.2218487}{-0.0177287}$

n-1=12.51

n=13.51

si n=13.51 $U_n=15000$

pour n=14 $U_n<15000$

alors l'usine sera en faillite dans l'année 2013

Chapitre 1 : Progression arithmétique et géométrique « en guise d'introduction »

Série N°1 :(progression arithmétique et géométrique)

Exercice 1 :

On considère la suite (un) définie par : $U_n = 5 - 2n$

1. Calculer U_0, U_1 et U_2 ;
2. Démontrer que (U_n) est une suite arithmétique dont on précisera la raison ;
3. Que vaut U_{100} ? Calculer la somme $S = U_0 + U_1 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + U_{100}$.

Exercice 2 :

On considère une suite géométrique (Un) de premier terme U1 et de raison q= -2 ;

1. Calculer U_2, U_3 et U_4 ;
2. Calculer U_{20} ;
3. Calculer le somme $S = U_1 + U_2 + \ldots\ldots\ldots + U_{20}$.

Exercice 3 :

Un étudiant loue une chambre pour 3 ans. On lui propose deux types de bail.

– 1^er^ contrat : un loyer de 200€ pour le premier mois puis une augmentation de 5€ par mois jusqu'à la fin du bail.
– 2^ème^ contrat : un loyer de 200€ pour le premier mois puis une augmentation de 2% par mois jusqu'à la fin du bail.

1. Calculer, pour chacun des deux contrats, le loyer du deuxième mois puis le loyer du troisième mois ;
2. Calculer, pour chacun des deux contrats, le loyer du dernier mois (c'est-à-dire du 36ème mois) ;
3. Quel est le contrat le plus avantageux pour un bail de 3 ans ?

Exercice 4 :

Pour l'achat d'un terrain et la construction d'une maison, un couple souscrit un emprunt. Les futurs propriétaires sont informés que le capital emprunté et les intérêts dus, lorsqu'ils seront remboursés, représenteront la somme de 80.000 €. La première mensualité est fixée à 300€ et le contrat stipule que les mensualités augmentent de 20€ chaque année.

Chapitre 1 : **Progression arithmétique et géométrique « en guise d'introduction »**

1. On note Sn le montant annuel remboursé au cours de n ième année suivant le début du prêt et on note n_0 la dernière année de remboursement. On admet que $n_0>10$.
   - Calculer S_1, S_2, S_3 et S_4 ;
   - Expliquer pourquoi la suite (S_n) se comporte comme une suite arithmétique pour $n<n_0$;
   - Exprimer Sn en fonction de n(pour $n<n_0$) ;
   - Calculer S_{10} ;
2. On s'intéresse maintenant à la somme Sn cumulée des montant annuels remboursés au cours des n premières années : $S_n=S_1+S_2+S_3+\ldots+S_n$.
   - Calculer S_1, S_2, S_3 et S_4.
   - Exprimer Sn en fonction de n (pour $n<n_{0)}$;
   - Au cours de quelle année le couple propriétaire finira son remboursement ?