UMMTO/FSECG
Département des sciences économiques
2ème Année LMD
Module : Mathématiques d'entreprise /Section : « B »

Chapirte1 : Formulation d'un programme linéaire (Modélisation) :

1. Introduction

L'importance de l'optimisation et la nécessité d'un outil simple pour modéliser des problèmes de décision que soit économique, militaire ou autres on fait de la programmation linéaire un des champs de recherche les plus actifs au milieu du siècle précédent. Les premiers travaux (1947) sont celle de George B. Dantzig et ses associés du département des forces de l'air des Etats Unis d'Amérique.

Les problèmes de programmations linéaires sont généralement liés à des problèmes d'allocations de ressources limitées, de la meilleure façon possible, afin de maximiser un profit ou de minimiser un coût. Le terme meilleur fait référence à la possibilité d'avoir un ensemble de décisions possibles qui réalisent la même satisfaction ou le même profit. Ces décisions sont en général le résultat d'un problème mathématique.

2. Les conditions de formulation d'un PL

La programmation linéaire comme étant un modèle admet des hypothèses (des conditions) que le décideur doit valider avant de pouvoir les utiliser pour modéliser son problème. Ces hypothèses sont :

1. Les variables de décision du problème sont positives
2. Le critère de sélection de la meilleure décision est décrit par une fonction linéaire de ces variables, c'est à dire, que la fonction ne peut pas contenir par exemple un produit croisé de deux de ces variables. La fonction qui représente le critère de sélection est dite fonction objectif (ou fonction économique).
3. Les restrictions relatives aux variables de décision (exemple: limitations des ressources) peuvent être exprimées par un ensemble d'équations linéaires. Ces équations forment l'ensemble des contraintes.
4. Les paramètres du problème en dehors des variables de décisions ont une valeur connue avec certitude

3. étapes de formulation d'un PL :

Généralement il y a trois étapes à suivre pour pouvoir construire le modèle d'un programme linéaire :

1. Identifier les variables du problème à valeur non connues (variable de décision) et les représenter sous forme symbolique (exp. x_1, y_1).
2. Identifier les restrictions (les contraintes) du problème et les exprimer par un système d'équations linéaires.
3. Identifier l'objectif ou le critère de sélection et le représenter sous une forme linéaire en fonction des variables de décision. Spécifier si le critère de sélection est à maximiser ou à minimiser.

4. Présentation Théorique

Un programme linéaire consiste à trouver le maximum ou le minimum d'une forme linéaire dite fonction objectif en satisfaisant certaines équations et inégalités dites contraintes. En langage mathématique, on décrira de tels modèles de la manière suivante :

Soient N variables de décision $x_1, x_2, \ldots, x_n$, l'hypothèse que les variables de décision sont positives implique que $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \ldots, x_N \geq 0$.

La fonction objective est une forme linéaire en fonction des variables de décision de type

$$z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_N x_N$$

où les coefficients $c_1, \ldots, c_N$ doivent avoir une valeur bien déterminée (avec certitude) et peuvent être positifs, négatifs ou nuls. Par exemple le coefficient c_j peut représenter un profit unitaire lié à la production d'une unité supplémentaire du bien x_j, ainsi la valeur de z est le profit total lié à la production des différents biens en quantités égales à $x_1, x_2, \ldots, x_N$.

Supposons que ces variables de décision doivent vérifier un système d'équations linéaires définis par M inégalités

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1N}x_N &\geq b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2N}x_N &\geq b_2 \\
&\vdots \\
a_{M1}x_1 + a_{M2}x_2 + \ldots + a_{MN}x_N &\geq b_M
\end{aligned}$$

où les coefficients $a_{1M}, \ldots, a_{MN}$ et $b_1, \ldots, b_M$ doivent avoir une valeur bien déterminée (avec certitude) et peuvent être positifs, négatifs ou nuls. Le paramètre b_i représente la quantité de matière première disponible dont le bien x_j utilise une quantité égale à $a_{ij} x_j$.

En suivant les étapes de formulation ci-dessus, on peut représenter le PL comme suit :

$$\begin{aligned}
Max \quad & c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_N x_N \\
s.c \quad & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1N}x_N \leq b_1 \\
& a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2N}x_N \geq b_2 \\
& \vdots \\
& a_{M1}x_1 + a_{M2}x_2 + \ldots + a_{MN}x_N \leq b_N \\
& x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \ldots, x_N \geq 0
\end{aligned}$$

5. Exemples de formulations

Limité au départ aux problèmes industriels et militaires, de nos jours plusieurs problèmes de divers domaines sont représentés ou approximés par des modèles de PL. L'utilisation de ces techniques de modélisation s'est renforcée encore après avoir construit des algorithmes et des logiciels capables de résoudre de plus larges problèmes avec autant de variables de décision que de contraintes.

La tâche de formulation demande généralement une certaine expertise et connaissance du problème pour pouvoir relever facilement les différentes composantes du problème et ainsi donner un programme qui modélise au mieux la situation réelle. Dans ce qui suit, on présentera quelques exemples de formulation en programme linéaire liés à différents problèmes de décision :

Exemple n°1 :

Un fabricant produit 2 types de yaourts `a la fraise A et B `a partir de Fraise, de Lait et de Sucre. Chaque yaourt doit respecter les proportions suivantes de matières premières

	Yaourts A	Yaourt B
Fraise	2	1
Lait	1	2
Sucre	0	1

Les matières premières sont en quantité limitée : 800 kilos de Fraises, 700 kilos de Lait et 300 kilos de sucre. La vente des yaourts A rapportent 4 € par kilo et les yaourts B 5€

Solution :

1. ***Identification des variables de décision :***
   X_1 : la quantité de yaourts A à produire ;
   X_2 : la quantité de yaourts A à produire ;
2. ***La fonction objective :***

   Max $Z= 4\ X_1 +5X_2$

3. ***Les contraints structurelles :***

	Yaourts A (X_1)	Yaourts B (X_2)	Disponibilités de matières premières	
Fraise	2	1	800	1ère Contrainte
Lait	1	2	700	2ème contrainte
Sucre	0	1	300	3ème contrainte

1ère Contrainte : $2X_1 +X_2 \leq 800$
2ème contrainte : $X_1+ 2X_2 \leq 700$
3ème contrainte : $X_2 \leq 300$

4. ***Les contraintes de positivité :***

$X_1 \geq$; $X_2 \geq 0$;

Alors, le programme linéaire peut s'écrire sous la forme mathématique suivante :

Max $Z= 4\ X_1 +5X_2$

$$\begin{cases} 2X_1 +X_2 \leq 800 \\ X_1+ 2X_2 \leq 700 \\ X_2 \leq 300 \end{cases}$$

$X_1 \geq$; $X_2 \geq 0$;

Exemple n°2 :

Un fleuriste dispose de 50 lys, 80 roses et 80 jonquilles. Il réalise ou bien des bouquets qu'il vend 40 euros comprenant 10 lys, 10 roses et 20 jonquilles, ou bien des bouquets dont il tire un prix de 50 euros qui comprennent 10 lys, 20 roses et 10 jonquilles. Comment le fleuriste doit il former les bouquets pour réaliser une recette maximale ?

Exemple n°3 :

Un agriculteur souhaite mélanger des engrais de façon à obtenir au minimum 15 unités de potasse, 20 unités de nitrates et 30 unités de phosphates. Il achète deux types d'engrais.

- Le type 1 procure 3 unités de potasse, 1 unité de nitrates et 3 unités de phosphates. Il coûte 120 €.
- Le type 2 procure 1 unités de potasse, 5 unité de nitrates et 2 unités de phosphates. Il coûte 60 €.

Exprimer à l'aide d'un programme linéaire la combinaison d'engrais qui remplira les conditions exigées au moindre coût.

Solution :

5. ***Identification des variables de décision :***
   X_1 : la quantité de mélange de type 1 à acheter ;
   X_2 : la quantité de mélange de type 2 à acheter;
6. ***La fonction objective :***

   Min $Z= 120\ X_1 +60X_2$

7. ***Les contraints structurelles***

	Mélange de type 1 (X_1)	Mélange de type2 (X_2)	Les besoins	
potasse	3	1	15	1ère Contrainte
Nitrates	1	5	20	2ème contrainte
Phosphates	3	2	30	3ème contrainte

1ère Contrainte : $3X_1 +X_2 \geq 15$

2ème contrainte : $X_1+ 5X_2 \geq 20$

3ème contrainte : $3X_1 +2X_2 \geq 30$

8. ***Les contraintes de positivité :***

$X_1 \geq$; $X_2 \geq 0$;

Alors, le programme linéaire peut s'écrire sous la forme mathématique suivante :

Max $Z= 120\ X_1 +60X_2$

$$\begin{cases} 3X_1 +X_2 \geq 15 \\ X_1+ 5X_2 \geq 20 \\ \end{cases}$$

$3X_1 + 2X_2 \geq 30$

$X_1 \geq$; $X_2 \geq 0$;

Exemple n°4 :

Un atelier fabrique des tables et des bureaux.

- Chaque table nécessite 2, 5 h pour l'assemblage, 3 h pour le polissage et 1 h pour la mise en caisse.
- Chaque bureau exige 1 h pour l'assemblage, 3 h pour le polissage et 2 h pour la mise en caisse.

L'entreprise ne peut disposer, chaque semaine, de plus de 10 h pour l'assemblage, de 15 h pour le polissage et de 8 h pour la mise en caisse.

Sa marge de profit est de 30 € par table et de 40 €par bureau. Combien de tables et de bureaux doit-on produire afin d'obtenir un profit hebdomadaires maximal ?

Exemple n°5 :

Un maraîcher, vendant des citrons et des oranges, veut les grouper par lots de vente. Le premier lot contient 5 citrons et 1 orange, et se vend à 4€. Le deuxième lot contient 1 citron et 10 oranges, et se vend à 6€. Il dispose au total de 60 citrons et 110 oranges.

Quelle est la répartition la plus avantageuse pour lui, entre les deux types de lots?

Série N°1(Modélisation)

Exercice n°1 :

Considérons :

- X_1 : nombre des unités P_1 à fabriquer.
- X_2 : nombre des unités P_2 à fabriquer.
- X_3 : nombre des unités P_3 à fabriquer.
- X_4 : nombre des unités P_4 à fabriquer.
- X_5 : nombre des unités P_5 à fabriquer.

R : le profit à réaliser pour

- Pour P_1 : R=96DA/Unité
- Pour P_2 : R=72DA/Unité
- Pour P_3 :R=48DA/Unité
- Pour P_4 : R=64DA/Unité
- Pour P_5 :R=81DA/Unité

Disponibilités

- M_1 : 130 Unités
- M_2 : 150 Unités
- M_3 : 115 Unités
- M_4 : 142 Unités

Plan de production :

	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
M1	0.5	1.2	0	0.6	0.8
M2	1	0.8	0.6	1	0.3
M3	0.7	1	0.9	1.5	0
M4	1.2	0.4	0.5	10	1.2

Question : Déterminer la fonction objective, les contraintes structurelles et les contraintes de positivité.

Exercice 2 : une entreprise dispose de 200Kgs de café africain, 300Kgs de café brésilien et 500Kgs de café colombien. En utilisant ces trois produits, l'entreprise procède à des mélanges pour obtenir deux types de café à commercialiser. Le plan de production est représente par le tableau suivant :

	Café type 1	Café type 2

Café africain	0.6	0.4
Café brésilien	0.3	0.4
Café colombien	0.1	0.2

Le 1^{er} type est vendu à 140 DA/Kg

Le $2^{ème}$ type est vendu à 170DA/Kg

Question : écrire le modèle de programmation linéaire correspondant à ce problème de manière à ce que la compagnie réalise un bénéfice maximal.

Exercice 3 : une entreprise possède deux usines U_1 et U_2, l'usine U_1 dispose de 500 unités d'un certain produit et l'usine U_2 dispose de 300 unités du même produit. L'entreprise a trois clients : E_1, E_2, E_3 dont la demande pour ce produit est : 100 unités pour le client E_1, 200 unités pour le client E_2, 300 unités pour le client E_3 ; les coûts unitaires de transport(en milliers de DA) sont résumés dans le tableau suivant :

	E_1	E_2	E_3
U_1	20	10	30
U_2	30	20	20

Question : Etablir un programme linéaire pour un plan de distribution optimal

Exercice4 : Une firme fabrique deux produits P1 et P2 à l'aide des matières premières M_1, M_2, M_3. Le plan de production de l'usine est présenté par le tableau suivant :

	P_1	P_2
M_1	2	1
M_2	4	2
M_3	0	1

La direction de la firme dispose des matières premières M_1, M_2, M_3 en quantités respectives :800 ,700 et 300 unités. Le profit dû à la fabrication d'une unité de P1 est égal à 5 et celui de P2 à 6.

Question : Ecrire le problème sous forme de modèle de programmation linéaire.

Corrigé type série 1 (Modélisation)

Exercice1 :

1) Identification des variables de décision :

- X_1 : nombre des unités P_1 à fabriquer.
- X_2 : nombre des unités P_2 à fabriquer.
- X_3 : nombre des unités P_3 à fabriquer.
- X_4 : nombre des unités P_4 à fabriquer.
- X_5 : nombre des unités P_5 à fabriquer.

2) Les contraintes structurelles :

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	**Disponibilités des matières**

						premières
M1	0.5	1.2	0	0.6	0.8	130
M2	1	0.8	0.6	1	0.3	150
M3	0.7	1	0.9	1.5	0	115
M4	1.2	0.4	0.5	10	1.2	142

1ère contrainte

2ème contrainte

3ème contrainte

4ème contrainte

- 1ère contrainte : $0,5 X_1 +1,2 X_2 +0 X_3 +0,6 X_4 +0,8X_5 \leq 130$
- 2ème contrainte : $1 X_1 + 0,8 X_2 +0,6 X_3 +1 X_4 +0,3X_5 \leq 150$
- 3ème contrainte : $0,7 X_1 +1 X_2 +0,9 X_3 +1,5 X_4 +0X_5 \leq 115$
- 4ème contrainte : $1,2 X_1 +0,4 X_2 +0,5 X_3 +10 X_4 +1,2X_5 \leq 142$

3) La fonction objective :

Max $Z= 96 X_1 +72 X_2 +48 X_3 +64 X_4 +81X_5$

4) Les contraintes de positivités :

$X_1 \geq 0$; $X_2 \geq 0$; $X_3 \geq 0$; $X_4 \geq 0$; $X_5 \geq 0$

Alors le programme linéaire peut être écrit comme suit :

Max $Z= 96 X_1 +72 X_2 +48 X_3 +64 X_4 +81X_5$

$$\begin{cases} 0,5 X_1 +1,2 X_2 +0 X_3 +0,6 X_4 +0,8X_5 \leq 130 \\ 1 \quad X_1 + 0,8 X_2 +0,6 X_3 +1 X_4 +0,3X_5 \leq 150 \\ 0,7 X_1 +1 X_2 +0,9 X_3 +1,5 X_4 +0X_5 \leq 115 \\ X_1 +0,4 X_2 +0,5 X_3 +10 X_4 +1,2X_5 \leq 142 \end{cases}$$

1,2

$X_1 \geq 0$; $X_2 \geq 0$; $X_3 \geq 0$; $X_4 \geq 0$; $X_5 \geq 0$

Exercice 2 :

1) Identification des variables de décision :

- X_1 : Quantité de café de type 1 à fabriquer
- X_2 : Quantité de café de type 1 à fabriquer

2) Les contraintes structurelles :

- 1ère contrainte : $0,6 X_1 +0,4 X_2 \leq 200$
- 2ème contrainte : $0,3 X_1 + 0,4 X_2 \leq 300$
- 3ème contrainte : $0,1 X_1 +0,2 X_2 \leq 500$

3) La fonction objective :

Max $Z= 140 X_1 +170 X_2$

4) Les contraintes de positivités :

$X_1 \geq 0$; $X_2 \geq 0$;

Alors le programme linéaire peut être écrit comme suit :

Max Z= $140 X_1+170 X_2$

$$\begin{cases} 0{,}6\ X_1 + 0{,}4\ X_2 \leq 200 \\ 0{,}3\ X_1 + 0{,}4\ X_2 \leq 300 \\ 0{,}1\ X_1 + 0{,}2\ X_2 \leq 500 \end{cases}$$

$\mathbf{X_1 \geq 0\ ;\ X_2 \geq 0}$

Exercice3 :

X11 : quantité de produit transporté de l'usine U1 vers le client E1

X12 : quantité de produit transporté de l'usine U1 vers le client E2

X13 : quantité de produit transporté de l'usine U1 vers le client E3

X21 : quantité de produit transporté de l'usine U2 vers le client E1

X22 : quantité de produit transporté de l'usine U2 vers le client E2

X23 : quantité de produit transporté de l'usine U3 vers le client E3

Alors le programme linéaire peut être écrit comme suit :

Min $Z= 20\ X_{11}+10X_{12}+ 30X_{13}+ 30X_{21}+20X_{22}+20X_{23}$

$$\begin{cases} X_{11}+X_{12}+X_{13} \leq 500 \\ X_{21}+ X_{22}+X_{23} \leq 300 \\ X_{11}+X_{21} = 100 \\ X_{12}+X_{22}= 200 \\ X_{13}+X_{23}= 300 \end{cases}$$

$X_{ij} \geq 0$ i=1,2 ; j=1,3

Exercice 4 :

- X_1 : Quantité de P1 à fabriquer
- X_2 : Quantité de P2 à fabriquer

Alors le programme linéaire peut être écrit comme suit :

Max Z= 5 X1+6 X2

$$\begin{cases} 2\ X1 + 1\ X2 \leq 800 \\ 4\ X1 + 2X2 \leq 700 \\ X2 \leq 300 \end{cases}$$

X1 ≥ 0 ; X2 ≥ 0

CHAPITRE 2

Résolution géométrique (graphique) d'un programme linéaire (PL)

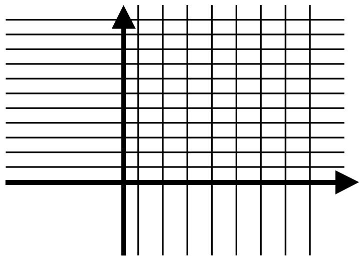
I. Introduction

Après avoir illustré par des exemples, comment un problème pratique peut être modélisé par un programme linéaire, l'étape qui va suivre sera certainement celle de la résolution de ce problème mathématique. La méthode graphique est l'une des premières méthodes utilisées à ce sujet.

Si on parle de résolution graphique alors on doit se limiter à une représentation à deux variables et au plus à trois variables. Ceci indique que dans ce chapitre on examinera seulement les programmes linéaires à deux variables de décision.

II. Système d'axes

Une des conditions de la réussite de notre représentation graphique est le choix d'un système d'axes. Un mauvais choix peut rendre notre représentation non claire et imprécise.



A cause des contraintes de non-négativité des variables de décision, nous nous intéressons seulement au cadran positif (voir figure ci-dessus).

Cette région s'appelle la *région des solutions possibles* du problème.

Prenons l'exemple 1 relatif au problème de production des yaourts à base de la fraise. Le programme linéaire est le suivant :

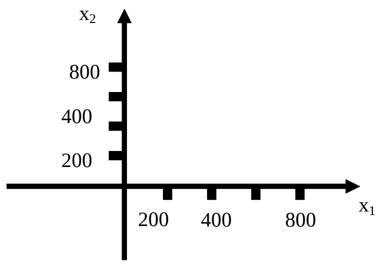
$$\text{Max } Z = 4X_1 + 5X_2$$

$$\begin{cases} 2X_1 + X_2 \leq 800 \\ X_1 + 2X_2 \leq 700 \end{cases}$$

$$X_2 \leq 300$$

Un bon choix se base sur une lecture des différents paramètres du programme linéaire. Dans notre cas, on ne peut qualifier de bon, le choix de 200 comme unité dans les deux axes.

Pour cet exemple, on peut choisir le système d'axes suivant :



III. Représentation graphique des contraintes

Parmi les solutions possibles d'un problème, il y a ceux qui vont satisfaire toutes les contraintes du programme, appelés solutions réalisables, et ceux qui vont satisfaire une partie ou aucune de ces contraintes, appelés solutions non réalisables.

Une représentation graphique des inégalités (des contraintes) va nous permettre de déterminer l'ensemble des solutions réalisables.

Revenons à l'exemple 1 du problème de production des yaourts :

- Une des contraintes de ce problème est celle relative à la disponibilité de la fraise : $2X_1+X_2 \leq 800$

L'ensemble des solutions qui vérifient cette inégalité est le même que celui qui vérifie
$2X_1+X_2=800$ et $2X_1+X_{2<}800$

L'ensemble des solutions qui correspond à l'équation est l'ensemble des points de la droite (Δ l) définie par $2X_1+X_2=800$.

L'inégalité $2X_1+X_2<800$ correspond à un demi-plan limité par la droite $2X_1+X_2=800$. Or cette droite divise le plan en deux demi-plans ouverts donc quel est le demi-plan à choisir ?

Pour ce faire, il suffit de prendre un point de l'un des demi-plans (c'est à dire n'appartenant pas à la droite $2X_1+X_2=800$) et voir s'il vérifie l'inégalité $2X_1+X_2<800$. Par exemple le point de coordonnées (0,0) vérifie l'inégalité $2X_1+X_2<800$ donc le demi-plan π_1 au-dessous de la droite est celui recherché.

L'espace hachuré représente le demi-plan fermé des solutions qui ne vérifient pas la contrainte$2X_1+X_2<800$.

Si on fait de même pour les deux autres contraintes du problème , on obtient les deux autres demi-plans π_2 et π_3 relatifs aux solutions vérifiant respectivement les contraintes $X_1+2X_2 \leq 700$ et $X_2 \leq 300$.

Une solution possible du problème est dite réalisable si et seulement si elle vérifie toutes les contraintes, c'est à dire si elle appartient aux trois demi-plans relatifs à chaque contrainte du programme linéaire, en d'autre terme à $\pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3$.

IV. Représentation de la fonction objectif

Soit *z* la valeur de la fonction objectif du problème de médecine $z = 4x_1 + 5x_2$.

Pour z=0, la fonction objectif est représentée de la manière suivante : pour Z=0

$X_{1=}$ -5 et X_2 =4

On peut tracer une infinité de droites qui représentent les différentes valeurs de la fonction objective. Par suite elles sont parallèles entre elles. De plus on peut améliorer la valeur de *z* indéfiniment dans le sens indiqué dans la figure ci-dessous.

Le problème est de connaître qu'elle est la droite qui correspond à la valeur maximale de la fonction objectif ?

V. Recherche de la solution optimale

a. Résolution graphique

Si nous retraçons l'ensemble des droites parallèles relatives aux différentes valeurs de la fonction objectif sur la figure qui représente l'ensemble des solutions réalisables, on peut localiser la solution optimale. Elle correspond à la solution réalisable qui intercepte la droite à la plus grande valeur de *z*.

Dans notre exemple, la solution optimale est l'intersection des deux contraintes $2X_1+X_2 \leq 800$ et $X_2 \leq 300$. Une évaluation des coordonnées de ce point revient à résoudre le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} 2X_1+X_2 \leq 800 \\ X_2 \leq 300 \end{cases}$$

Elle correspond d'après le graphique au point (300,200). Donc la prescription optimale est de 300 unités des yaourts de type 1 et 200 unités des yaourts de type2. Le chiffre d'affaire rapporté (la valeur de la fonction objectif) est égal à 2200€.

b. Résolution par énumération :

On remarque que la solution optimale du problème de production des yaourts à la base de la fraise est un point extrême qui se trouve sur le bord de l'ensemble des solutions. Une telle solution est dite solution réalisable de base.

On peut admettre le résultat suivant : « Si un programme linéaire admet une solution optimale alors il existe une solution réalisable de base pour laquelle la fonction objectif atteint la valeur optimale »

Une méthode de résolution du programme linéaire consiste donc à déterminer les solutions réalisables de base (les points d'intersection des droites qui forment les contraintes) et à calculer pour chaque point la valeur de la fonction objectif. La solution du programme linéaire est la solution à qui on associe la valeur optimale de la fonction objective.

Dans le problème de production des yaourts, l'ensemble des solutions réalisables de base présente 3 points extrêmes A(0,300), B(100,300) et C(300,200) et D(400,0). La valeur de la fonction objective associée respectivement à A, B, C et D sont : 1500€, 1900€ , 2200€ et 1600€. On vérifie bien que C est la solution optimale du problème avec une valeur optimale égale à 2200€.

VI. Exemples

Dans cette section on donne quelques exemples de résolution graphique de problèmes linéaires relatifs au différents cas possibles :

<table>
<tr><td colspan="2">Problème de maximisation</td></tr>
<tr><td>$$\begin{array}{lll} Max & 100x_1 + 200x_2 & \\ s.c. & x_1 + x_2 \leq 150 & (1) \\ & 4x_1 + 2x_2 \leq 440 & (2) \\ & x_1 + 4x_2 \leq 480 & (3) \\ & x_1 \leq 90 & (4) \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 & \end{array}$$</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">la solution optimale est B(40,110)</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td colspan="2">Problème avec solution non bornée</td></tr>
<tr><td>$$\begin{array}{lll} Max & -2x_1 + 3x_2 & \\ s.c. & x_1 \leq 5 & (1) \\ & 2x_1 - 3x_2 \leq 6 & (2) \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 & \end{array}$$</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">On peut augmenter la valeur de la fonction objectif dans la direction des flèches indéfiniment donc la solution est non bornée</td></tr>
</table>

Problème impossible	
$$\begin{array}{lll} Min & 3x_1 + 2x_2 & \\ s.c. & x_1 + 2x_2 \le 2 & (1) \\ & 2x_1 + 4x_2 \ge 8 & (2) \\ & x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 & \end{array}$$	
L'espace des solutions réalisables est vide, il est l'intersection des deux zones grises de la figure ci-dessus	

Problème à solutions multiples	
$$\begin{array}{lll} Max & x_1 + 3x_2 & \\ s.c. & 2x_1 + 6x_2 \le 30 & (1) \\ & x_1 \le 10 & (2) \\ & x_2 \le 4 & (3) \\ & x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 & \end{array}$$	
L'ensemble des points décrit par le segment [AB] représente les solutions optimales du problème linéaire	

Problème de dégénerescence	
$$\begin{array}{lll} Max & x_1 + x_2 & \\ s.c. & 3x_1 + 2x_2 \le 40 & (1) \\ & x_1 \le 10 & (2) \\ & x_2 \le 5 & (3) \\ & x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 & \end{array}$$	
La solution optimale B(10,5) est dite dégénérée si trois contraintes concourent en ce point.	

CHAPITRE 3

La Méthode de Simplexe

I. Introduction

On a présenté dans le chapitre précédent une procédure graphique pour résoudre un programme linéaire à deux variables. Par contre, dans la plupart des problèmes réels, on a plus que deux variables à déterminer. Une procédure algébrique pour résoudre les programmes linéaires avec plus que deux variables fera l'objet de ce chapitre. C'est la méthode de simplexe.

Une implémentation de cette procédure à permis de résoudre des programmes avec un peu plus de quelques milliers de variables. Le programme Lindo qu'on présentera dans le chapitre 7 (en version pour étudiant) supporte au plus 200 variables et 100 contraintes.

Dans ce chapitre la méthode de simplexe est présentée pour les problèmes $\begin{array}{ll} Max & c^t x \\ s.c & A\,x \le b \\ & X \ge 0 \end{array}$

et en utilisant le problème de l'agriculteur :

$$\begin{array}{ll} Max & 100x_1 + 200x_2 \\ s.c. & x_1 + x_2 \quad \le 150 \\ & 4x_1 + 2x_2 \le 440 \\ & x_1 + 4x_2 \le 480 \\ & x_1 \qquad \le 90 \\ & x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0 \end{array}$$

II. Mise sous forme standard

La mise sous forme standard consiste à introduire des variables supplémentaires (une pour chaque contrainte) de manière a réécrire les inégalités ($\le$) sous la forme d'égalités. Chacune de ces variables représente le nombre de ressources non utilisés. On les appelle variable d'écart. La forme standard s'écrit donc :

$$\begin{array}{ll} Max & c^t x \\ s.c & A\,x + S \le b \\ & X \ge 0, S \ge 0 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{ll} Max & c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_N x_N \\ s.c & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1N} x_N + S_1 = b_1 \\ & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2N} x_N + S_2 = b_2 \\ & \vdots \\ & a_{M1}x_1 + a_{M2}x_2 + \ldots + a_{MN} x_N + S_M = b_M \\ & x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \ldots, x_N \ge 0 \\ & S_1 \ge 0, S_2 \ge 0, \ldots, S_M \ge 0 \end{array}$$

La forme standard du programme linéaire de l'agriculteur est :

$$\begin{array}{lll} Max & 100x_1 + 200x_2 & (3.1) \\ s.\ c & x_1 + x_2 + S_1 = 150 & (3.2) \\ & 4x_1 + 2x_2 + S_2 = 440 & (3.3) \end{array}$$

$$x_1 + 4x_2 + S_3 = 480 \qquad (3.4)$$
$$x_1 + S_4 = 90 \qquad (3.5)$$
$$x_1, x2, S_1, S_2, S_3, S_4 \geq 0 \qquad (3.6)$$

L'impact de ces variables d'écart sur la fonction objectif est nulle. Ceci explique le fait que leur existence soit tout simplement liée à une mise en forme du programme linéaire initial. Ces variables d'écart peuvent prendre des valeurs nonnegatives. Le fait de donner la valeur des variables d'écart a l'optimum donne une idée du nombre des ressources non utilisées.

III. Revue algébrique de la méthode du simplexe

La question qui se pose : que demande-t-on d'une procédure algébrique ?

En premier lieu, on note que les contraintes du problème (3.2)-(3.5), forment un système de 4 équations et de 6 variables. Or il y a un nombre infini de solutions de ce système d'équations. Donc une procédure algébrique, pour la résolution d'un programme linéaire doit être capable de retrouver les solutions des systèmes d'équations où il y a plus de variables que de contraintes.

En deuxième lieu, ce ne sont pas toutes les solutions qui vérifient (3.2)-(3.5) qui sont des solutions du programme linéaire ; ils doivent en plus satisfaire les contraintes de nonnégativité. Ainsi une procédure algébrique doit être capable d'éliminer, de l'ensemble des solutions qui satisfait (3.2)-(3.1) celles qui n'arrivent pas à satisfaire les contraintes de nonnégativité.

Finalement, une procédure algébrique pour résoudre les programmes linéaires doit être en mesure de choisir parmi les solutions réalisables ceux qui maximisent la fonction objectif.

La méthode de simplexe est une procédure algébrique qui tient compte de ces trois considérations.

Pour illustrer cette procédure, supposons que $x_2 = 0$ et $S_1 = 0$. Notre système devient

$$\left|\begin{array}{l} x_1 = 150 \\ x_1 + S_2 = 440 \\ 4x_1 + S_3 = 480 \\ x_1 + S_4 = 90 \end{array}\right. \iff \left|\begin{array}{l} x_1 = 150 \\ S_2 = 340 \\ S_3 = -120 \\ S_4 = -60 \end{array}\right.$$

Les variables x_1, S_2, S_3 *et* S_4 (non nulles) sont dites variables de base et les variables S_1, x_2, (nulles) sont dites variables hors base.

Généralement, si on a un programme linéaire standard constitué de *n* variables et *m* contraintes $(n \geq m)$ alors une solution de base (extrême) est obtenue, en annulant $(n\text{-}m)$ variables et en résolvant les *m* contraintes pour déterminer les valeurs des autres *m* variables.

On note qu'une solution de base n'est pas toujours réalisable. C'est le cas de la solution qu'on vient de retrouver.

Une solution réalisable de base serait celle où $x_1 = x_2 = 0$, ainsi on a :

$$\left|\begin{array}{l} S_1 = 150 \\ S_2 = 440 \\ S_3 = 480 \\ S_4 = \ \ 90 \end{array}\right.$$

Cette solution correspond à un point extrême de l'ensemble des solutions réalisables qui est l'origine *O*.
Pour la méthode de simplexe une solution réalisable de base initiale est demandée. Une telle solution peut être retrouvée en annulant toutes les variables de décision. Ce qui correspond dans notre exemple au point d'origine O.

A partir de ce point la méthode de simplexe va générer successivement des solutions réalisables de base pour notre système d'équations en s'assurant que la valeur de la fonction objectif est en train d'augmenter jusqu'à localiser la solution optimale du problème qui est un point extrême de l'espace des solutions réalisables donc une solution réalisable de base.

Ainsi, on peut décrire la méthode de simplexe comme étant une procédure itérative qui passe d'une solution réalisable de base à une autre jusqu'à atteindre la solution optimale.

La description mathématique de ce processus fera l'objet de la section suivante.

IV. La méthode des tableaux

La méthode de simplexe commence par l'identification d'une solution réalisable de base et ensuite, elle essaye de trouver d'autres solutions réalisables de base jusqu'à atteindre à la solution optimale. Ainsi, on doit, tout d'abord, retrouver cette solution réalisable de base.

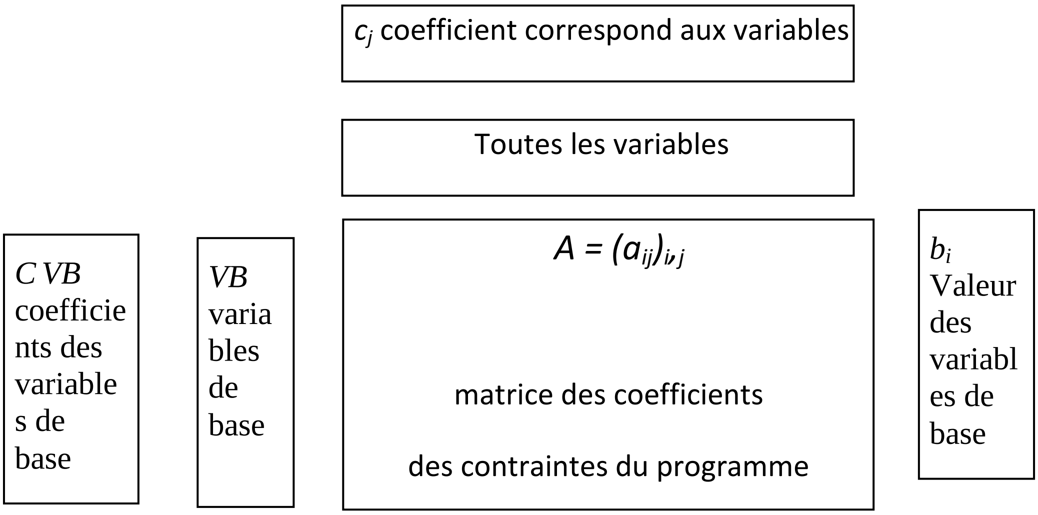
Généralement si le programme linéaire satisfait ces deux propriétés :
P1/ Parmi les variables du problème standard, il y a m variables qui apparaissent avec un coefficient non nul dans chaques contraintes (dans notre exemple : S_1, S_2, S_3 *et* S_4).
P2/ Les valeurs du second membre des contraintes (les composants du vecteur *b*) sont positives.

Alors une solution réalisable de base est obtenue en annulant les (n-m) variables de décision et la valeur des variables d'écart est directement donnée par le second membre. La deuxième propriété assure la satisfaction des contraintes de nonnégativité des variables d'écart.
Dans notre exemple, la forme standard du programme linéaire vérifie ces deux propriétés.

a. Tableau de simplexe initial

Après avoir mis le programme linéaire sous une forme qui vérifie les deux propriétés P1 et P2, l'étape suivante est de tracer le tableau de simplexe initial.

Le modèle général des tableaux de simplexe est :



Pour notre exemple le tableau de simplexe initial est le suivant :

	Cj	*100*	*200*	*0*	*0*	*0*	*0*	
CVB	*VB*	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	S_4	*bi*
0	S_1	*1*	*1*	*1*	*0*	*0*	*0*	*150*
0	S_2	*4*	*2*	*0*	*1*	*0*	*0*	*440*
0	S_3	*1*	*4*	*0*	*0*	*1*	*0*	*480*
0	S_4	*1*	*0*	*0*	*0*	*0*	*1*	*90*

On remarque qu'on a placé en première ligne les contributions unitaires de toutes les variables de décision $x_1,..., S_4$ dans la fonction objectif. Dans la troisième ligne, on retrouve la première contrainte $x_1 + x_2 + S_1 = 150$. La valeur 150 représente ici la valeur de S_1 relative à la solution réalisable de base initiale. Dans la première colonne on trouve les contributions nulles des variables d'écart qui forment la solution de base initiale.

Remarque : Les variables qui figurent dans la deuxième colonne sont dites variables de base. A chacune de ces variables, on associe la valeur 1 à l'intersection de la ligne et de la colonne relative à cette variable et dans le reste de la colonne on trouve des zéros.

Jusqu'à ici on a vu comment retrouver une solution réalisable de base et comment présenter le tableau de simplexe initial. Dans la section suivante, on examinera la procédure liée à la méthode de simplexe qui permet de passer de cette solution réalisable de base initiale à une autre solution réalisable de base qui donne une meilleure valeur de la fonction objectif.

b. Amélioration de la solution

Pour améliorer la solution il faut générer une autre solution de base (point extrême) qui augmente la valeur de la fonction objectif. C'est à dire, qu'on doit sélectionner une variable hors base et une variable de base et les permuter de telle façon que la nouvelle solution donne une plus grande valeur de la fonction objectif.

Pour savoir si on peut améliorer notre solution réalisable de base initiale nous allons introduire deux nouvelles lignes au-dessus du tableau de simplexe.

<u>La première ligne</u>, notée z_j, représente la variation de la valeur de la fonction objectif qui résulte du fait qu'une unité de la variable correspondante à la $j^{\text{ème}}$ colonne de la matrice A est amenée dans la base. Par exemple z_1 représente la diminution du profit qui résulte de l'ajout d'une unité à la valeur de x_1.
En effet, si on produit un hectare supplémentaire de x_1, la valeur de quelques variables de base vont changer vu qu'on a :

$$\left|\begin{array}{l} x_1 + S_1 = 150 \\ 4x_1 + S_2 = 440 \\ x_1 + S_3 = 480 \\ x_1 + S_4 = 90 \end{array}\right.$$

Donc, une augmentation de x_1 de 0 vers 1 va être accompagnée d'une diminution des variables de base S_1, S_2, S_3, S_4 respectivement de $1, 4, 1$ et 1.
L'effet de cette diminution sur la fonction objectif est nul car les coefficients des variables d'écarts dans cette fonction sont nulles

$$z_1 = 0 \times S_1 + 0 \times S_2 + 0 \times S_3 + 0 \times S_4 = 0 \times 1 + 0 \times 4 + 0 \times 1 + 0 \times 1 = 0$$

La valeur z_1 est calculée en multipliant les coefficients de la première colonne de la matrice A relatifs à la variable x_1 par les coefficients c_i de la première colonne. Généralement, on a :

$$z_j = \sum_i a_{ij} \times c_i$$

<u>La deuxième ligne</u>, notée $c_j - z_j$, représente l'effet net de l'augmentation d'une unité de la $j^{\text{ème}}$ variable.
Dans notre exemple, l'effet net sur la fonction objectif engendré par l'augmentation d'une unité dans la valeur de x_1 est

$$c_1 - z_1 = 100 - 0 = 100$$

Si on reprend la même opération pour le reste des variables, on trouve le tableau suivant :

	C_j	100	200	0	0	0	0	
CVB	VB	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	S_4	bi
0	S_1	1	1	1	0	0	0	150
0	S_2	4	2	0	1	0	0	440
0	S_3	1	2	0	0	1	0	480
0	S_4	1	0	0	0	0	1	90
z_j		0	0	0	0	0	0	Z=0
c_j - z_j		100	200	0	0	0	0	

En analysant la ligne relative à l'évaluation nette c_j - z_j, on remarque qu'une augmentation d'une unité de la valeur de x_1 engendre un profit de 100 dinars, et qu'une augmentation d'une unité de la valeur de x_2 engendre un profit supplémentaire de 200 dinars. Donc, si on a à choisir, on va opter pour une augmentation de la valeur de x_2. On dit que x_2 est la variable entrante.

Le problème est maintenant, jusqu'où peut-on augmenter x_2 ?

Cette augmentation ne peut pas se faire infiniment, sous l'hypothèse que x_1 reste nulle. On a

$$\left|\begin{array}{ll} x_1 + S_1 & = 150 \\ 2x_2 + S_2 & = 440 \\ 4x_2 + S_3 & = 480 \\ x_4 + S_2 & = \ \ 90 \end{array}\right.$$

On peut voir que x_2 peut prendre comme valeur maximale la valeur de *100* (il ne faut pas oublier que les $S_{i,}$ $i=1, 2, 3, 4$ sont des variables positives). Cette valeur est obtenue en choisissant la plus petite valeur positive des divisions de *100/1*, *440/2*, *480/4* et *90/0* (on suppose que *90/0* est égale à l'infini ∞).

En général, la valeur maximale de la variable entrante x_j est le minimum des valeurs positives des rapports de b_i par les coefficients de la colonne de la matrice *A* relatif à la j$^{\text{ème}}$ variable. Ces rapports feront l'objet d'une autre colonne à droite de la matrice *A*.

Dans notre exemple, on aura :

	Cj	100	200	0	0	0	0			
CVB	VB	X_1	x_2	S_1	S_2	S_3	S_4	bi	Bi/ai2	
0	S_1	1	1	1	0	0	0	150	150	
0	S_2	4	2	0	1	0	0	440	220	
0	S_3	1	4	0	0	1	0	480	120	
0	S_4	1	0	0	0	0	1	90	∞	
Zj		0	0	0	0	0	0			
Cj-Zj		100	200	0	0	0	0			

Le fait d'augmenter x_2 jusqu'à la valeur *150* va engendrer l'annulation de la valeur du variable d'écart S_3, ce qui élimine S_3 de la base. On appelle S_3 variable sortante.

L'élément *4*, à l'intersection de la ligne relative à la variable sortante S_1 (dite ligne pivot) et de la colonne relative à la variable entrante x_2 (dite colonne pivot) est l'élément pivot. (C'est l'élément cerclé dans le tableau).

c. Calcul des tableaux suivants

Dans le nouveau tableau de simplexe on va remplacer S_3 par x_2 et l'ensemble des variables de base deviendra S_1, S_2, x_2, S_4. On exige que x_2 prenne la même place dans la colonne des variables de base que celle de la variable sortante S_3.
Jusqu'à maintenant on ne peut pas remplir le tableau relatif à cette nouvelle solution de base :

			100	*200*	*0*	*0*	*0*	*0*
			x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	S_4
0	S_1							
0	S_2							
200	x_2							
0	S_4							

Ce qui reste à déterminer sont les coefficients a_{ij} de la nouvelle matrice A et les valeurs b_i des variables de base. Ceci est réalisé en utilisant la règle de pivot :

1. Diviser le ligne de pivot par la valeur de l'élément de pivot pour trouver la ligne transformée de la ligne de pivot.

		100	*200*	*0*	*0*	*0*	*0*	
		x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	S_4	
0	S_1							
0	S_2							
200	x_2	*1/4*	*1*	*0*	*0*	*-1/4*	*0*	*120*
0	S_4							

2. A chacune des variables de base, on associe la valeur 1 à l'intersection de la ligne et de la colonne relative à cette même variable et dans le reste de la colonne on trouve des zéros.

			100	*200*	*0*	*0*	*0*	*0*
			x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	S_4
0	S_1			*0*	*1*	*0*		*0*
0	S_2			*0*	*0*	*1*		*0*

200	x_2	120	1/4	1	0	0	-1/4	0
0	S_4			0	0	0		1

3. Pour calculer le reste des valeurs du tableau, on opère à des combinaisons linéaires dans le précèdent tableau de simplexe. Par exemple pour calculer la nouvelle valeur qui va prendre la place de la valeur 100 devant la variable de base S1: On multiplie 100 par le pivot (4), on retranche de ce produit le produit de la projection de la valeur 100 sur la ligne pivot par la projection de la valeur 100 sur la colonne pivot, et on divise le tout par la valeur du pivot (4).

			100	200	0	0	0	0
			x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	S_4
0	S_1	**150**	1	1	1	0	**0**	0
0	S_2	440	4	2	0	1	0	0
0	x_2	480	1	4	0	0	1	0
0	S_4	90	1	0	0	0	0	1

$$\boxed{\frac{150\times 4-480\times 1}{4}=30}\qquad\qquad \boxed{\frac{0\times 4-1\times 1}{4}=-\frac{1}{4}}$$

			100	200	0	0	0	0
			x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	S_4
0	S_1	**30**		0	1	0	**-1/4**	0
0	S_2			0	0	1		0
200	S_3	120	1/4	1	0	0	-1/4	0
0	S_4			0	0	0		1

En appliquant cette règle sur notre exemple, on trouve le tableau suivant :

			100	200	0	0	0	0
			x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	S_4
0	S_1	30	3/4	0	1	0	-1/4	0
0	S_2	200	7/2	0	0	1	-1/2	0
200	S_3	120	1/4	1	0	0	-1/4	0
0	S_4	90	1	0	0	0	0	1

<u>Remarques:</u>

a) On vérifie toujours que les colonnes de la matrice relative à chacune des variables de base sont formées par des zéros sauf 1 dans l'intersection avec la ligne relative aux mêmes variables de base.

b) On peut vérifier aussi que l'ensemble des solutions réalisables, induit par les contraintes décrites dans le dernier tableau de simplexe, est le même que celui représenté par les contraintes initiales. La règle de pivot est une combinaison linéaire des contraintes du programme linéaire donc elle ne change pas l’ensemble des solutions réalisables.

c) La nouvelle solution réalisable de base est

$x_1 = 0$
$x_2 = 120$
$S_1 = 30$
$S_2 = 200$
$S_3 = 0$
$S_4 = 90$

Cette nouvelle solution correspond au point A(voir graphique). On vérifie bien que la valeur de la fonction objectif est passer de 0 à 120 x 200. La valeur de la fonction objectif peut être facilement calculer en multipliant membre à membre les c_i de la première colonne par les valeurs des variables de base Q_i dans la 3ème colonne.

d) La solution de départ correspond au point O. La première itération nous a amené dans le sens de l'amélioration du profit (fonction objectif), c’est à dire le long de l’axe des ordonnées.

Ayant retrouvé une nouvelle solution, on veut savoir s’il est possible de retrouver une solution réalisable de base meilleure. Pour arriver à cette fin, on doit ajouter les deux lignes relatives au choix de la variable entrante, et la colonne relative au choix de la variable sortante.

		100	*200*	*0*	*0*	*0*	*0*			
		x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	S_4			
0	S_1	*3/4*	*0*	*1*	*0*	*-1/4*	*0*	*30*	*40*	→
0	S_2	*7/2*	*0*	*0*	*1*	*-1/2*	*0*	*200*	*400/7*	
200	x_2	*1/4*	*1*	*0*	*0*	*1/4*	*0*	*120*	*480*	
0	S_4	*1*	*0*	*0*	*0*	*0*	*1*	*90*	*90*	
		50	*200*	*0*	*0*	*50*	*0*			
		50	*0*	*0*	*0*	*-50*	*0*			
		↑								

La variable entrante est x_1 ; elle présente la plus grande valeur c_j- z_j. Si on calcule les quotients b_i/c_{i1}, on retrouve que la variable sortante est S_1 à qui on associe la plus petite valeur du ratio $b_1/c_{11}=40$. L’élément pivot dans ce tableau est 3/4. La nouvelle base est composée de x_1, S_2, x_2, S_4.

Le tableau de simplexe suivant issu de l’application de la règle de pivot est :

			100	*200*	*0*	*0*	*0*	*0*
			x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	S_4
100	x_1	*40*	*1*	*0*	*4/3*	*0*	*-1/3*	*0*
0	S_2	*60*	*0*	*0*	*-14/3*	*1*	*2/3*	*0*
200	x_2	*110*	*0*	*1*	*-1/3*	*0*	*1/3*	*0*
0	S_4	*50*	*0*	*0*	*-4/3*	*0*	*1/3*	*1*

Cette nouvelle solution

$$\left|\begin{array}{l} x_1 = 40 \\ x_2 = 120 \\ S_1 = 0 \\ S_2 = 60 \\ S_3 = 0 \\ S_4 = 50 \end{array}\right.$$

correspond au point B qui est, d'après les résultats retrouvée par la méthode graphique, la solution optimale du problème. Ainsi, il faut s'attendre à ce que la méthode de simplexe reconnaisse cette solution comme étant la solution optimale.

Ajoutons la ligne relative au calcul de l'effet net d'une augmentation unitaire d'une des variables du problème, on a :

		100	200	0	0	0	0	
		x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	S_4	*bi*
100	x_1	1	0	4/3	0	-1/3	0	40
0	S_2	0	0	14/3	1	2/3	0	60
200	x_2	0	1	-1/3	0	1/3	0	110
0	S_4	0	0	-4/3	0	1/3	1	50
		100	200	200/3	0	100/3	0	
		0	0	-100/3	0	-100/3	0	

L'effet net associé aux variables hors base S_1 et S_2 est négatif. Ceci nous oblige à dire que faire entrer une de ces deux variables dans la base va engendrer une diminution dans la valeur de la fonction objectif. Donc il n'y a pas une autre solution réalisable de base qui peut engendrer un profit meilleur. Par suite cette dernière solution est la solution optimale. Ce dernier tableau de simplexe est donc dit tableau optimal.

On peut généraliser ce résultat en disant que la solution optimale d'un programme linéaire est atteinte s'il n'y a aucune valeur positive dans la ligne c_j-z_j du tableau du simplexe.

V. Résumé de la procédure de la méthode du simplexe

(dans le cas d'un problème de maximisation sous contraintes ≤ et avec un second membre positif)

Etapes	Justification
1. Formuler un programme linéaire pour le problème réel.	Pour obtenir une représentation mathématique du problème
2. Vérifier que le second membre du programme linéaire est positif	Ceci est nécessaire pour obtenir comme variable de base initiale l'origine
3. Ecrire le programme linéaire sous une forme standard	Mettre toutes les contraintes sous forme d'égalité
4. Construire le premier tableau de simplexe	Ce tableau correspond à la solution initiale de base
5. Choisir comme variable entrante dans la base celle qui admet le plus grand effet net positif c_j-z_j.	La valeur de c_j-z_j indique la quantité d'augmentation de la fonction objectif si on augmente la valeur de x_j d'une unité.
6. Choisir la variable sortante de la base celle qui admet le plus petit ratio supérieur à zéro.	La plus petite valeur de Q_i/a_{ij} indique le nombre maximal d'unité de x_j qu'on peut introduire avant que la variable de base de l'ième ligne ne soit égale à zéro.
7. Construire le nouveau tableau en utilisant la règle de pivot	Cette règle nous permet entre autre de calculer les valeurs des nouvelles variables de décision
8. Faire le test d'optimalité. Si (c_j-z_j) ≤ 0 pour toutes les variables (hors base), la solution obtenue est donc optimale. Sinon retourner à l'étape 5.	Si (c_j-z_j) ≤ 0 alors on n'a pas d'intérêt à faire entrer dans la base aucune de ces variables. Une telle introduction engendra une diminution de la fonction objectif.

VI. Exemple

Résoudre le programme linéaire suivant en utilisant la méthode de simplexe.

$$
\begin{aligned}
&Max \quad 3x_1 + 2x_2 \\
&SC \quad -x_1 + 2x_2 \leq 4 \\
&\qquad 3x_1 + 2x_2 \leq 14 \\
&\qquad x_1 + x_2 \leq 3 \\
&\qquad x_1 \geq 0 \;\; x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

→ La forme standard du programme linéaire s'écrit comme suit :

$$
\begin{aligned}
&Max \quad 3x_1 + 2x_2 \\
&SC \quad -x_1 + 2x_2 + S_1 = 4 \\
&\qquad 3x_1 + 2x_2 + S_2 = 4 \\
&\qquad x_1 - x_2 + S_3 = 3 \\
&\qquad x_1, x_2, S_1, S_2, S_3 \geq 0
\end{aligned}
$$

→ Tableau de simplexe initial (1ère itération)

			3	2	0	0	0	
			x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	
0	S_1	4	-1	2	1	0	0	-4
0	S_2	14	3	2	0	1	0	14/3
0	S_3	3	(1)	-1	0	0	1	3 →
			0	0	0	0	0	
			3	2	0	0	0	
			↑					

La variable entrante est x_1 puisqu'elle présente le plus grand effet net positif. La variable sortante est S_3 car elle correspond au plus petit quotient positif.

→ 2ème itération

			3	2	0	0	0	
			x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	
0	S_1	7	0	1	1	0	1	7
0	S_2	5	0	(5)	0	1	-3	1 →
3	x_1	3	1	1	0	0	1	3
			3	0	0	0	3	
			0	2	0	0	-3	
				↑				

La variable entrante est x_2 et la variable sortante est S_2

→ 3ème itération

			3	2	0	0	0
			x_1	x_2	S_1	S_2	S_3
0	S_1	6	0	0	1	-1/5	8/5
2	x_2	1	0	1	0	1/5	-3/5
3	x_1	4	1	0	0	1/5	2/5
			3	2	0	1	0
			0	0	0	-10	0

Tous les c_j-$z_j \leq 0$ donc le tableau de simplexe est optimal et la solution optimal du programme linéaire est

$x_1 = 4$
$x_2 = 1$
$S_1 = 6$

$S_2 = 0$
$S_3 = 0$

La valeur de la fonction objectif est 14.

Remarque : L'effet net de l'augmentation d'une unité de la valeur de S_3 (variable hors base) est nul. Donc si on introduit S_3 dans la base, on ne modifie pas la valeur de la fonction objectif. Ainsi une autre solution optimale peut être trouvée pour notre programme linéaire. Ceci confirme le résultat de la méthode graphique qui indique que ce problème admet un ensemble de solution optimale décrit par le segment [BC].

La solution optimale donnée par le dernier tableau de simplexe correspond au point C.
Le tableau du simplexe suivant est :

			3	*2*	*0*	*0*	*0*
			x_1	x_2	S_1	S_2	S_3
0	S_3	*15/4*	*0*	*0*	*5/8*	*-1/8*	*1*
2	x_2	*13/4*	*0*	*1*	*3/8*	*1/8*	*0*
3	x_1	*5/2*	*1*	*0*	*-1/4*	*1/4*	*0*
			3	*2*	*0*	*1*	*0*
			0	*0*	*0*	*-1*	*0*

Le tableau est optimal et la solution correspondante est :

$x_1 = 5/2$
$x_2 = 13/4$
$S_1 = 0$
$S_2 = 0$
$S_3 = 15/4$

La valeur de la fonction objectif est 14.