COURS DE RECHERCHE OPERATIONNELLE

Présenté par : Mme HARCHEB Leila

Objectif du cours :

Ce cours vise à présenter une Introduction à la recherche opérationnelle et faire un Tour d'horizon des différentes techniques de recherche opérationnelle. La recherche opérationnelle est une technique d'aide à la décision.

Etapes pratiques

1. Définition du problème
2. Construction d'un modèle
3. Solution du modèle
4. Validation du modèle
5. Implémentation de la solution

Méthodologie

– Les étapes les plus importantes sont la définition du problème (suppose un dialogue avec le décideur) et la construction du modèle (prendre conscience des hypothèses simplificatrices et de leur impact).

– La phase de validation doit permettre de remettre en cause la validité du modèle. – Une approche globale nécessite donc un aller-retour constant entre le modèle et les attentes du décideur.

Techniques principales

– Programmation linéaire

– Programmation en nombres entiers

– Optimisation dans les réseaux

– Programmation non linéaire

– "Optimisation" multi-critères

– Programmation dynamique

– Modèles stochastiques

– Simulation

Applications de la programmation linéaire

3 Définition, exemples et méthode de résolution

3.1 Notions de bases

Programmation linéaire

Définition de la Programme linéaire : Modèle mathématique dans lequel la fonction objectif et les contraintes sont linéaires en les variables.

Applications

Optimisation de l'usage de ressources limitées dans les domaines militaire, industriel, agricole, économique, ... Existence d'algorithmes très efficaces pour résoudre des problèmes de très grande taille (simplexe, points intérieurs)

3.2 Exemples de modèles linéaires

Exemple (Production de peinture) : Une société produit de la peinture d'intérieur et d'extérieur à partir de deux produits de base M1 et M2.

Données

Quantité utilisée par tonne		Quantité disponible par jour	
Extérieure		Intérieure	
M1	6	4	24
M2	1	2	6
Profit par tonne	5	4	

Contraintes supplémentaires

– Demande maximum en peinture d'intérieur : 2 tonnes / jour.

– La production en peinture d'intérieur ne dépasser que d'une tonne celle d'extérieur.

Formulation (Production de peinture)

Alternatives (variables, inconnues du problème)

x_1 = tonnes de peinture d'extérieur produites par jour

x_2 = tonnes de peinture d'intérieur produites par jour

Fonction objectif à optimiser

$$\text{Max } z = 5x_1 + 4x_2$$

Restrictions (contraintes)

$$6x_1 + 4x_2 \leq 24$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 6$$

$$x_2 \leq 2$$

$$x_2 - x_1 \leq 1$$

$$x_1, \quad x_2 \geq 0$$

Solutions et méthodes de résolution

– Solution admissible : satisfait toutes les contraintes.

$$x_1 = 3, x_2 = 1 \ (\Rightarrow z = 19)$$

– Nous voulons trouver la solution (admissible) optimale.

– Infinité de solutions admissibles!

Méthodes pour trouver l'optimum

– Méthode graphique

– Simplexe

Exemple (Diet problem) : – On désire déterminer la composition, à coût minimal, d'un aliment pour bétail qui est obtenu en mélangeant au plus trois produits bruts : orge et arachide.

– La quantité nécessaire par portion est de 400g.

– L'aliment ainsi fabriqué devra comporter au moins 30% de protéines et au plus 5% de fibres.

Données

Quantité par gramme d'aliment			Côut (DA/kg)
aliment	Protéines	Fibres	
Orge	0.09	0.02	1.5
Arachide	0.60	0.06	4.5

Variables

x_1 = grammes d'orge par portion

x_2 = grammes d'arachide par portion

Objectif

Min $z = 0.0015x_1 + 0.0045x_2$

Contraintes

Quantité totale : $x_1 + x_2 \geq 400$

Protéines : $0.09x_1 + 0.6x_2 \geq 0.3(x_1 + x_2)$

Fibres : $0.02x_1 + 0.06x_2 \leq 0.05(x1+ x_2)$

Non-négativité : $x_1, x2 \geq 0$

3.3 Forme standard et forme canonique d'un programme linéaire

Forme standard

Définition de la Forme standard :

Un programme linéaire est sous forme standard lorsque toutes ses contraintes sont des égalités et toutes ses variables sont non-négatives.

Représentation matricielle

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & c^T x \\ \text{s.c.} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

n variables, m contraintes, $m < n$, $c,x \in R^n$, $b \in R^m$, $A \in R^{m \times n}$.

Forme canonique

Définition de la Forme canonique : Un programme linéaire est sous forme canonique lorsque toutes ses contraintes sont des inégalités et toutes ses variables sont non-négatives.

Représentation matricielle

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & c^T x \\ \text{s.t.} \quad & Ax \leq b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

n variables, m contraintes, $c,x \in R^n$, $b \in R^m$, $A \in R^{m \times n}$.

Théorème 1 (Equivalence des formes standard et canonique). Tout programme linéaire peut s'écrire sous forme standard et sous forme canonique.

Démonstration.

– Une contrainte d'inégalité $a^T x \leq b$ peut être transformée en égalité par l'introduction d'une variable d'écart :

$$a^T x + s = b,$$

$$s \geq 0.$$

– Une contrainte d'égalité $a^T x = b$ peut être remplacée par deux inégalités :

$$a^T x \leq b$$

$$-a^T x \leq -b$$

– $a^T x \geq b \Leftrightarrow -a^T x \leq -b$.

– $\min c^T x = -\max -c^T x$.

– Variable x non restreinte : substitution par deux variables (partie positive et négative)

$$x = x^+ - x^-$$

$$x^+, x^- \geq 0.$$

Il existe toujours une solution optimale telle que $x^+ = 0$ ou $x^- = 0$.

Forme standard du problème de production de peinture

$$\max z = 5x_1 + 4x_1$$

$$\text{s.c.} \quad 6x_1 + 4x_2 \leq 24$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 6$$

$$x_2 \leq 2$$

$$x - x_1 \leq 1$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Forme standard

$$\begin{array}{llr}
\max z = & 5x_1 + 4x_2 & \\
\text{s.c} & 6x_1 + 4x_2 + s_1 & = 24 \\
 & x_1 + 2x_2 + \quad s_2 & = 6 \\
 & x_2 + \quad s_3 & = 2 \\
 & -x_1 + x_2 + \quad s_4 & = 1 \\
 & x_1, \; x_2, \; s_1, s_2, s_3, s_4 & \geq 0
\end{array}$$

Forme matricielle

$$\max \; c^T x$$

$$\text{s.t.} \quad Ax = b$$

$$x \geq 0$$

$$C=\begin{pmatrix}5\\4\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix},\ x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\s_1\\s_2\\s_3\\s_4\end{pmatrix},\ A=\begin{pmatrix}6&4&1&0&0&0\\1&2&0&1&0&0\\0&1&0&0&1&0\\-1&1&0&0&0&1\end{pmatrix},\ b=\begin{pmatrix}24\\6\\2\\1\end{pmatrix}$$

Variables pouvant prendre des valeurs négatives

Exemple (Vente de hamburgers) :

– Un fast-food vend des hamburgers et des cheeseburgers. Un hamburger utilise 125 g. de viande alors qu'un cheeseburger n'en utilise que 100 g.

– Le fast-food démarre chaque journée avec 10 kg de viande mais peut commander de la viande supplémentaire avec un coût additionnel de 2 DA par kg pour la livraison. – Le profit est de 0.02 DA pour un hamburger et 0.015 DA pour un cheeseburger.

– La demande ne dépasse pas 900 sandwiches / jour, et les surplus de viande sont donnés au Restos du Cœur.

Combien le fast-food doit-il produire de sandwiches de chaque type par jour?

Variables

x_1 = nombre de hamburgers / jour

x_2 = nombre de cheeseburgers / jour

Contraintes

– Commande de viande supplémentaire :

$$125x_1 + 100x_2 + x_3 = 10000, \quad x_3 \text{non restreint}$$

– Le coût pour la viande supplémentaire apparaît seulement si $x_3 < 0$.

– Substitution de x_3 par 2 variables non-négatives :

$$x_3 = x_3' - x_3'',\ x_3', x_3'' \geq 0$$

$$125x_1 + 100x_2 + x_3' - x_3'' = 10000$$

– Borne supérieure sur les ventes : $x_1 + x_2 \leq 900$.

Modèle complet

$$\max z = 0.02x_1 + 0.015x_2 - 0.002\, x_3''$$

$$\text{s.c.} \quad 125x_1 + 100x_2 + x_3' - x_3'' = 10000$$

$$x_1 + x_2 \leq 900$$

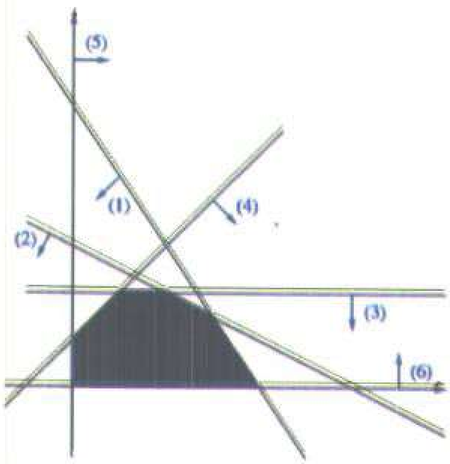
$$x_1, x_2, x_3', x_3'' \geq 0$$

Remarque : Il existe une solution optimale telle que $x_3' = 0$ ou $x_3'' = 0$.

3.4 Résolution de programmes linéaires

3.4.1 Résolution graphique

Représentation graphique



Production de peinture

$$\max z = 5x_1 + 4x_2$$

Sous les contraintes :

$$6x_1 + 4x_2 \leq 24 \qquad (1)$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 6 \qquad (2)$$

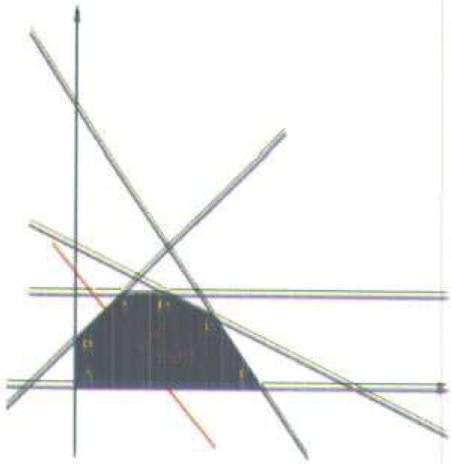
$$x_2 \leq 2 \qquad (3)$$

$$x_2 - x_1 \leq 1 \qquad (4)$$

$$x_1 \geq 0 \qquad (5)$$

$x_2 \geq 0$ (6)

Géométrie des solutions



Ensemble des solutions admissibles

Polyèdre (ABCDEF)

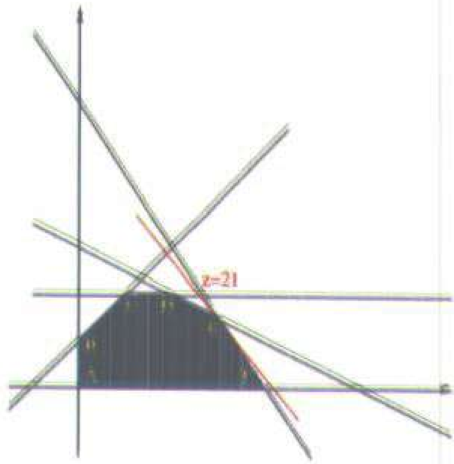
Courbes de niveaux de l'objectif

Ensemble de solutions ayant un profit (valeur de l'objectif) donné : intersection entre une droite et le polyèdre.

Amélioration de la solution

Recherche d'une direction dans laquelle le profit z augmente.

Résolution graphique (Production de peinture)



Recherche de la solution optimale

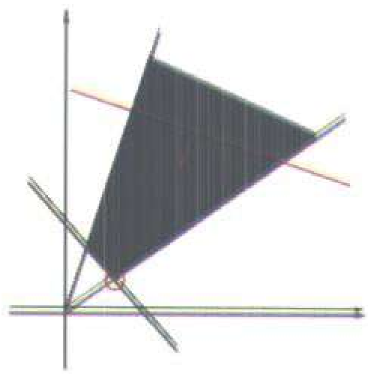
– La droite mobile doit garder une intersection avec l'ensemble des solutions admissibles.

– Solution optimale : $x_1 = 3$, $x_2 = 1.5$ (E)

– La solution optimale est un sommet du polyèdre.

– Cette observation est la base de l'algorithme du simplexe.

Résolution graphique (Diet problem)



Diet problem

$$\min z = 0.0015x_1 + 0.0045x_2$$

Sous les contraintes

$$x_1 + x_2 \geq 400$$

$$0.21x_1 - 0.30x_2 \leq 0$$

$$0.03x_1 - 0.01x_2 \geq 0$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$

Solution optimale

$$x_1 = \frac{4000}{17} \simeq 235.5$$

$$x_2 = \frac{2800}{17} \simeq 164.7$$

$$z = \frac{186}{170} \simeq 1.094$$

3.4.2 La méthode du simplexe

Idées de base

– Solution optimale : sommet (point extrême).

– Idée fondamentale du simplexe : déplacement des sommets en sommet adjacent de manière à améliorer la fonction objectif.

– Transformation des inégalités en égalités : forme standard du programme linéaire - système de m équations à n inconnues (m < n).

– Identification algébrique des sommets : correspondance avec les bases d'un système d'équations.

Solutions de base

– Système de m équations linéaires à n inconnues (m < n) : infinité de solutions.

– Si on fixe à zéro n−m variables : système de m équations à m inconnues possédant une solution unique (si la matrice est inversible). C'est une solution de base.

Définition (Solution de base) : Une solution de base d'un programme linéaire est la solution unique du système de m équations à m inconnues obtenu en fixant à zéro n−m variables (pourvu que la matrice du système soit inversible).

Les variables fixées à zéro sont appelées variables hors base et les autres variables en base.

Exemple (Production de peinture) : Prenons $B = \{s_1,s_2,s_3,s_4\}$.

$$z = 0 + 5x_1 + 4x_2$$

$$s_1 = 24 - 6x_1 - 4x_2$$

$$s_2 = 6 - x_1 - 2x_2$$

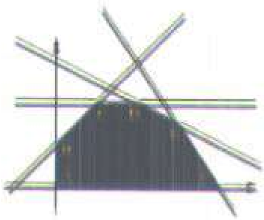
$$s_3 = 2 - x_2$$

$$s_4 = 1 + x_1 - x_2$$

Si $x_1 = x_2 = 0$, alors $s_1 = 24$, $s_2 = 6$, $s_3 = 2$, $s_4 = 1$. Toutes ces valeurs sont non-négatives et la solution est réalisable.

Définition (Solution de base réalisable) : Une solution de base telle que toutes les variables prennent des valeurs non-négatives est appelée solution de base réalisable.

Géométrie des solutions de base



– Prenons $B = \{s_1,s_2,s_3,s_4\} \Rightarrow x_1 = x_2 = 0$, $s_1 = 24$, $s_2 = 6$, $s_3 = 2$, $s_4 = 1$.

– Cette solution de base réalisable correspond au sommet (0,0).

Base	Solution	Objectif	Sommet
$\{s_1,s_2,s_3,s_4\}$	(0,0)	0	A
$\{x_1,s_2,s_3,s_4\}$	(4,0)	20	F
$\{s_1,x_1,s_3,s_4\}$	(6,0)	–	Non réalisable
$\{x_1,x_2,s_3,s_4\}$	(3,1.5)	21	E

Théorème 2. Toute solution de base réalisable correspond à un sommet du polyèdre.

Détermination de la solution de base optimale

– Nombre maximum de solutions de base :

$$\frac{n!}{m!\,(n-m)!}$$

– Algorithme "bête et méchant" : énumération de toutes les bases.

– Méthode du simplexe : partir d'une solution de base admissible et passer à une solution de base voisine qui améliore la valeur de l'objectif.

– Solution voisine : changement d'une variable en base.

– 3 étapes :

1. Détermination de la variable entrante.
2. Détermination de la variable sortante.
3. Pivotage.

L'algorithme du simplexe

Variable entrante

$$z = 0 + 5x_1 + 4x_2$$

$$s_1 = 24 - 6x_1 - 4x_2$$

$$s_2 = 6 - x_1 - 2x_2$$

$$s_3 = 2 - x_2$$

$$s_4 = 1 + x_1 - x_2$$

– Si x_1 (ou x_2) augmente (entre en base), la valeur de la fonction objectif z augmente.

– Quelle est la valeur maximale de x_1 ?

– Contraintes : les autres variables doivent rester positives.

Variable sortante

$$s_1 = 24 - 6x_1 \geq 0 \rightarrow x_1 \leq 4$$

$$s_2 = 6 - x_1 \geq 0 \rightarrow x_1 \leq 6$$

$$s_3 = 2 \geq 0 \rightarrow 2 \geq 0 \text{ toujours!} \qquad \Rightarrow x_1 \leq 4$$

$$s_4 = 1 + x_1 \geq 0 \rightarrow x_1 \geq -1 \text{ toujours!}$$

Pivotage

– Si $x_1 = 4$, alors $s1 = 0$.

– x_1 entre en base, s1 sort de la base.

– Substitution : $x1 = 4 - \frac{1}{6}s1 - \frac{2}{3}x2$

– Nouveau système :

$$Z = 20 - \frac{5}{6}s1 + \frac{2}{3}x2$$

$$x1 = 4 - \frac{1}{6}s1 - \frac{2}{3}x2$$

$$s2 = 2 + \frac{1}{6}s1 - \frac{4}{3}x2$$

$$s3 = 2 \qquad - x2$$

$$s4 = 5 - \frac{1}{6}s1 - \frac{5}{3}x2$$

Règles de pivotage

Variable entrante

Choisir la variable k hors base avec le profit marginal maximum (maxz) ou le coût réduit minimum (minz).

$$\max z \quad \rightarrow \quad k = \arg\max_{i \in N} \bar{c_i}$$
$$\min z \quad \rightarrow \quad k = \arg\min_{i \in N} \bar{c_i}$$

Si $\bar{c_k} \leq 0$ (max) ou $\bar{c_k} \geq 0$ (min) pour tout $k \in N$, solution optimale, STOP.

$$z = 0 \boxed{+5x_1} + 4x_2$$

$$s_1 = 24 - 6x_1 - 4x_2$$

$$s_2 = 6 - x_1 - 2x_2$$

$$s_3 = 2 - x_2$$

$$s_4 = 1 + x_1 - x_2$$

Variable sortante

Choisir la variable l en base telle que

$$l = \arg \min_{j \in B : \overline{a_{jk}} > 0} \frac{\overline{b_j}}{\overline{a_{jk}}}$$

Si $\overline{a_{lk}} \leq 0$ pour tout l ∈ B, problème non borné, STOP.

$$z = 0 \quad +5x_1 +4x_2$$

$$s_1 = 24 \boxed{-6x_1} -4x_2$$

$$s_2 = 6 \quad -x_1 -2x_2$$

$$s_3 = 2 \qquad -x_2$$

$$s_4 = 1 \quad +x_1 -x_2$$

Pivotage

$$\overline{a_{ij}}' = \begin{cases} \dfrac{\overline{a_{lj}}}{\overline{a_{lk}}} & i = l \\ \overline{a_{ij}} - \dfrac{\overline{a_{ik}}\,\overline{a_{lj}}}{\overline{a_{lk}}} & i \neq l \end{cases}$$

$$\overline{b_i}' = \begin{cases} \dfrac{\overline{b_l}}{\overline{a_{lk}}} & i = l \\ \overline{b_i} - \dfrac{\overline{a_{ik}}\,\overline{b_l}}{\overline{a_{lk}}} & i \neq l \end{cases}$$

$z = 0 +5x_1 +4x_2$

$s_1 = 24 \boxed{-6x_1} -4x_2$

$s_2 = 6 -x_1 -2x_2$

$s_3 = 2 -x_2$

$s_4 = 1 +x_1 -x_2$

$$Z = 20 - \frac{5}{6}s1 + \frac{2}{3}x2$$

$$x1 = 4 - \frac{1}{6}s1 - \frac{2}{3}x2$$

$$s2 = 2 + \frac{1}{6}s1 \boxed{-\frac{4}{3}x2}$$

$$s3 = 2 \qquad - x2$$

$$s4 = 5 - \frac{1}{6}s1 - \frac{5}{3}x2$$

$$Z = 21 - \frac{3}{4}s1 - \frac{1}{2}s2$$

$$x1 = 3 - \frac{1}{4}s1 + \frac{1}{2}s2$$

$$x2 = \frac{3}{2} + \frac{1}{8}s1 - \frac{3}{4}s2$$

$$s3 = \frac{1}{2} - \frac{1}{8}s1 + \frac{3}{4}s2$$

$$s4 = \frac{5}{2} - \frac{3}{8}s1 + \frac{5}{4}s2$$

Présentation en tableau

Présentation compacte pour effectuer les calculs sans répéter les systèmes d'équations.

Itération1

Var. en base	z	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	S_4	Solution
z	-1	5	4	0	0	0	0	0
S_1	0	6	4	1	0	0	0	24
S_2	0	1	2	0	1	0	0	6
S_3	0	0	1	0	0	1	0	2
S_4	0	-1	1	0	0	0	1	1

Itération2

Var . en abse	z	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	S_4	Solution
z	-1	0	$\frac{2}{3}$	$-\frac{5}{6}$	0	0	0	-20
S_1	0	6	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$	0	0	0	4
S_2	0	1	$\frac{4}{3}$	$-\frac{1}{6}$	1	0	0	2
S_3	0	0	1	0	0	1	0	2
S_4	0	0	$\frac{5}{3}$	$\frac{1}{6}$	0	0	1	5

Itération3

Var . en abse	z	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	S_4	Solution
z	-1	0	0	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{2}$	0	0	-21
S_1	0	1	0	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$	0	0	3
S_2	0	0	1	$-\frac{1}{8}$	$\frac{4}{3}$	0	0	$\frac{3}{2}$
S_3	0	0	0	$\frac{1}{8}$	$-\frac{3}{4}$	1	0	$\frac{1}{2}$
S_4	0	0	0	$\frac{3}{8}$	$-\frac{5}{4}$	0	1	$\frac{5}{2}$

3.4.4 Cas particuliers

Solutions optimales multiples

– Si la fonction objectif est parallèle à une contrainte active pour la solution optimale, la même valeur de l'objectif peut être prise par plusieurs solutions admissibles.

– Il y a une infinité de solutions optimales dans ce cas (toutes les combinaisons convexes de sommets optimaux).

– Cela se traduit par un profit marginal nul pour une ou plusieurs variables hors base.

Exemple (Solutions optimales multiples) :

$$\max z = 2x_1 + 4x_2$$

$$\text{s.c.} \quad x_1 + 2x_2 \leq 5$$

$$x_1 + x_2 \leq 4$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Var. en base	z	x_1	x_2	s_1	s_2	Solution
z	-1	2	4	0	0	0
s_1	0	1	2	1	0	5
S_2	0	1	1	0	1	4
z	-1	0	0	-2	0	-10
x_1	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{5}{2}$
s_2	0	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$
z	-1	0	0	-2	0	-10
x_2	0	0	1	1	-1	1
x_1	0	1	0	-1	2	3

Solution optimale :

$X_1 = 0\alpha + 3(1-\alpha) = 3 - 3\alpha$

$X_2 = \frac{5}{2}\alpha + 1(1-\alpha) = 1 + \frac{3}{2}\alpha \ (0 \leq \alpha \leq 1)$

Problèmes non bornés

– Certains problèmes sont non bornés dans une direction donnée.

– Si cette direction est une direction d'amélioration de la fonction objectif, celle-ci peut prendre une valeur arbitrairement grande!

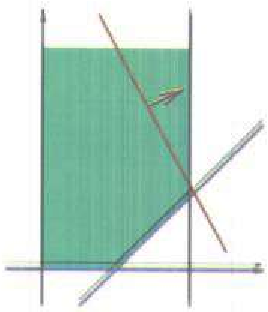
Exemple (Problèmes non bornés) :

$$\max z = 2x_1 + x_2$$

$$\text{s.c.} \quad x_1 - x_2 \leq 1$$

$$2x_1 \leq 4$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$



Var.en base	z	x_1	x2	s_1	s_2	Solution
z	-1	2	1	0	0	0
s_1	0	1	-1	1	0	1
S_2	0	2	0	0	1	4

– Tous les coefficients (sauf le profit marginal) dans la colonne de x_2 sont négatifs ou nuls.

– Cela signifie que toutes les contraintes de non-négativité sont satisfaites quelle que soit la valeur de x_2.

– L'objectif peut donc augmenter indéfiniment.

Problèmes impossibles

– Le système de contraintes peut n'avoir aucune solution.

– Généralement, provient d'une mauvaise formulation du problème.

Exemple (Problèmes impossibles) :

$$\max z = 3x_1 + 2x_2$$

$$\text{s.c.} \quad 2x_1 + x_2 \leq 2$$

$$3x_1 + 4x_2 \geq 12$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

4 Dualité

4.1 Le problème dual

Problème primal et problème dual

Problème primal

$$\begin{array}{ll} \max & c^T x \\ \text{s.c.} & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

n variables, m contraintes, m < n, c,x $\in R^n$, b $\in R^m$, A $\in R^{m \times n}$.

Problème dual

$$\begin{array}{ll} \min & b^T y \\ \text{s.c.} & A^T y \geq c \\ & (y \text{ non restreint}) \end{array}$$

m variables, n contraintes, m < n, c $\in R^n$, b,y $\in R^m$, A $\in R^{m \times n}$.

Exemple 11 (Problème primal et dual - forme standard).

max $z = x_1 + x_2$

$$\begin{array}{ll} \text{s.c.} & 2x_1 + x_2 = 5 \quad (y_1) \\ & 3x_1 - x_2 = 6 \quad (y_2) \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

Problème dual:

$$\min w = 5y_1 + 6y_2$$

$$\begin{array}{ll} \text{s.c} & 2y_1 + 3y_2 \geq 1 \quad (x_1) \\ & y_1 \ - y_2 \geq 1 \quad (x_2) \end{array}$$

Propriétés et règles de construction du dual

Théorème 3. Le problème dual du problème dual est le problème primal.

Règles de construction

Problème max	Problème min
Contrainte	**Variable**
$\leq$	≥ 0
$=$	Non restreinte
Variable	**Contrainte**
≥ 0	$\geq$
Non restreinte	$=$

Exemple (Problème primal et dual - forme générale) :

Problème primal:

$$\max z = 5x_1 + 12x_2 + 4x_3$$

$$\text{s.c.} \quad \begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &\leq 10 \quad (y_1) \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 &= 8 \quad (y_2) \\ x_1, \quad x_2, \quad x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

Problème dual:

$$\min w = 10y_1 + 8y_2$$

$$\text{s.c} \quad \begin{aligned} y_1 + 2y_2 &\geq 5 \quad (x_1) \\ 2y_1 - y_2 &\geq 12 \quad (x_2) \\ y_1 + 3y_2 &\geq 4 \quad (x_3) \\ y_1 &\geq 0 \end{aligned}$$