Cours 1 ere Année

Dettes

CHAPITRE I :

Les suites numériques

1. Notion sur les suites numériques

1.1. Définition

Une **suite numérique** est une fonction à variables réelles, que l'on peut noter :

$$\begin{aligned} u : \mathbb{N} &\to \mathbb{R} \\ n &\mapsto u_n \end{aligned}$$

C'est une liste indexée de nombres. Elle a un premier terme, un deuxième terme, etc.

Exemple : Les nombres pairs constituent une suite numérique que l'on peut définir par:

$$\begin{aligned} u : \mathbb{N} &\to \mathbb{N} \\ n &\mapsto 2n \end{aligned}$$

On aura alors :

$$u_0 = 0,\ u_1 = 2,\ u_2 = 4,\ u_3 = 6,\ u_4 = 8, \ldots$$

Plus généralement, le terme $u(n)$ correspond au $(n-1)^{\text{ième}}$ terme de la liste de nombres donnée.

Notations :

- On utilise généralement les lettres $u, v, w, \ldots$ pour caractériser une suite.
- (u_n) est appelé **terme** de la suite d'indice n (ou de rang n).
- La suite dans sa globalité est notée (u_n).
- Le rang du terme est sa position par rapport au début de la liste des termes.

Remarque : Attention ! Il ne faut pas confondre le terme d'indice n de la suite et le $n$ième terme de la suite.

1.2. Modes de génération d'une suite

- **D'une manière explicite**

On dit qu'une suite (u_n) est définie de manière explicite si l'on connaît la fonction f telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = f(n).$$

Exemple : Soit (u_n) la suite définie par : $u_n = -n^2 + n - 2$.

On a : $u_0 = -0^2 + 0 - 2 = 2$; $u_1 = -1^2 + 1 - 2 = -2$; $u_2 = -2^2 + 2 - 2 = -4$; $u_5 = -5^2 + 5 - 2 = -22$; etc.

- **Par récurrence**

Une suite (u_n) est définie par récurrence s'il existe une fonction f telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$$

Exemple : La suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n^2 + 1 \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

est définie par récurrence où $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f(x) = x^2+1$, dont le premier terme $u_0 = 1$.

1.3. Sens de variation d'une suite

Pour étudier les variations de la suite (u_n), il suffit d'étudier le signe de $u_n+1 - u_n$:

- Si pour tout n, $u_n+_1 - u_n > 0$ alors (u_n) est croissante.
- Si pour tout n, $u_n+_1 - u_n < 0$ alors (u_n) est décroissante.
- Si pour tout n, $u_n+_1 - u_n = 0$ alors (u_n) est constante.

2. Suites arithmétiques

2.1. Définition

On dit qu'une suite (u_n) est **arithmétique** si on passe d'un terme au suivant en ajoutant toujours le même nombre réel r.

$$\boldsymbol{U_{n+1} = u_n + r}$$

Le réel r est alors appelé **raison** de la suite.

Exemples :

1. La suite : 1, 6, 11, 16, 21, . . . est arithmétique de raison 5.

2. La suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 10 \\ U_{n+1} = u_n - 3 \end{cases}$$

est arithmétique de raison (−3).

3. La suite des entiers naturels : 0, 1, 2, 3,4, 5, . . . est arithmétique de raison 1.

4. La suite des entiers naturels impairs est arithmétique de raison 2.

Propriété : Une suite (u_n) est arithmétique si et seulement si la différence $u_{n+1} - u_n$ est constante pour tout entier n. Dans ce cas, la constante trouvée est la raison de la suite.

Exemples :

1. Soit u la suite définie par $u_n = 3n - 2$.

$u_{n+1} - u_n = 3(n + 1) - 2 - (3n - 2) = 3n + 3 - 2 - 3n + 2 = 3$

La suite est donc arithmétique de raison 3 et de premier terme $u_0 = -2$.

2. Soit v la suite définie par $v_n = n^2$.

$v_{n+1} - v_n = (n + 1)^2 - n^2 = n^2 + 2n + 1 - n^2 = 2n + 1$

Le résultat dépend de n, la suite n'est donc pas arithmétique.

3. Soit w la suite définie par :

$$\begin{cases} w_0 = -1 \\ w_{n+1} = w_n + p^2 \end{cases}$$

Par définition, la suite est arithmétique de raison p^2

2.2. Représentation graphique et sens de variation

Propriété

Soit u une suite arithmétique de raison r. Dans un repère du plan, les points de coordonnées $(n ; u_n)$ associés à cette suite sont alignés.

Pour une suite arithmétique, on parle alors d'évolution linéaire.

Théorème : Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r.

– Si $r > 0$, alors la suite (u_n) est croissante.

– Si $r < 0$, alors la suite (u_n) est décroissante

– Si $r = 0$, alors la suite (u_n) est constante

Exemple

_ Soit u une suite arithmétique de premier terme $u_0 = 5$ et $r = -2$.

a) Calculer u_1 ; u_2 ; u_3 et u_4.

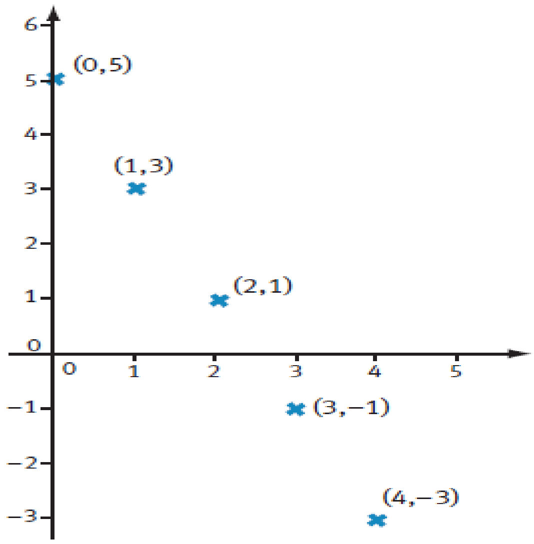
b) Représenter graphiquement les 5 premiers termes de cette suite dans un repère.

c) Quel est le sens de variation de cette suite ?

Correction

a) Comme u est une suite arithmétique de premier terme u0 = 5 et r = – 2, on a :
$u_1 = 3$; $u_2 = 1$; $u_3 = -1$ et $u_4 = -3$.

b)



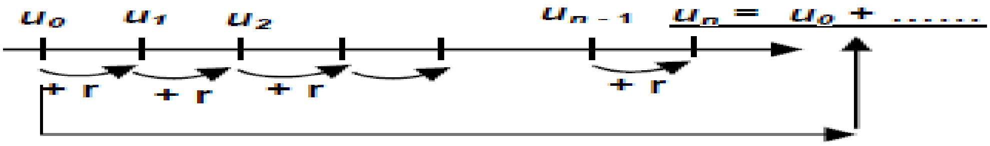
c) Comme $r = -2$, la suite u est une suite strictement décroissante.

2.3. Expression en fonction de *n*

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r.

On a :

$u_1 = u_0 + r$ $u_2 = u1 + r = (u_0 + r) + r = u_0 + 2r$ $u_3 = u_2 + r = (u_0 + 2r) + r = u_0 + 3r$

Plus 

généralement, on a le résultat suivant :

$$u_n = u_0 + nr$$

Si (u_n) est une suite arithmétique de raison r et si n et p sont deux entiers naturels, on a :

$$u_n = u_p + (n - p)\, r$$

Exemple : Soit (u_n) la suite arithmétique de premier terme $u_0 = 7$ et de raison (−2).

On a : $u_n = u_0 + nr = 7 + n \times (-2) = 7 - 2n$.

En particulier : $u_{50} = 7 - 2 \times 50 = 7 - 100 = -93$.

2.3. Somme des termes consécutifs

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r. On note S_n la somme des (n + 1) premiers termes de la suite (u_n), c'est-à-dire :

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n$$

$$S_n = (nombre\ des\ termes\ \times \frac{premier\ terme + dernier\ terme}{2})$$

$$S_n = (n+1)\ \times \frac{(u_0 + u_n)}{2}$$

3. Suites géométriques

3.1. Définition

On dit qu'une suite (un) est **géométrique** si on passe d'un terme au suivant en multipliant toujours par le même nombre réel q.

$$u_{n+1} = q \times u_n$$

Le réel q est alors appelé **raison** de la suite.

Exemples

1. La suite : 1, 2, 4, 8, 16, . . . est géométrique de raison 2.

2. La suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = -\frac{1}{2}u_n \end{cases}$

est géométrique de raison $\left(-\frac{1}{2}\right)$.

3. La suite définie par $u_n = (-1)^n$ est géométrique de raison (-1).

Propriété : Une suite (u_n) est géométrique si et seulement si le quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ est constante pour tout entier n. Dans ce cas, la constante trouvée est la raison de la suite.

Exemples

1. Soit u la suite définie par $u_n = 5 \times 3^{n+2}$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{5 \times 3^{n+3}}{5 \times 3^{n+2}} = 3^{n+3-n-2} = 3$$

La suite est donc géométrique de raison 3 et de premier terme $u_0 = 5 \times 3^2 = 45$

2. Soit v la suite définie par $v_n = \frac{3^n}{4^{n+1}}$

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{\frac{3^{n+1}}{4^{n+2}}}{\frac{3^n}{4^{n+1}}} = \frac{3^{n+1}}{4^{n+2}} \times \frac{4^{n+1}}{3^n} = \frac{3^{n+1-n}}{4^{n+2-n-1}} = \frac{3}{4}$$

La suite est donc géométrique de raison $\frac{3}{4}$ et de premier terme $v_0 = \frac{3^0}{4^1} = \frac{1}{4}$

3.2. Représentation graphique et sens de variation

Théorème : Soit (u_n) une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0 positif.

- Si $q > 1$, alors la suite (u_n) est croissante.
- Si $q = 1$, la suite (u_n) est constante.
- Si $0 < q < 1$, alors la suite (u_n) est décroissante.

Exemple

Soit u une suite géométrique de premier terme $u_0 = 5$ et q= 0,3.

a) Quel est le sens de variation de cette suite ?

b) Représenter graphiquement les 5 premiers termes de cette suite dans un repère.

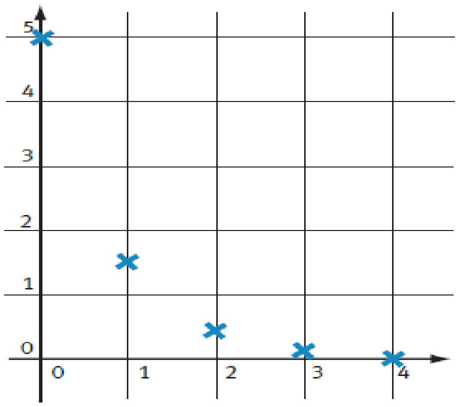
Correction

a) Comme u est une suite géométrique de premier terme $u_0 = 5$ et $q = 0{,}3$, on a :

$u_n = u_0 \times q^n = 5 \times 0.3^n$.

Comme $0 < 0.3 < 1$, la suite est strictement décroissante.

b)



n	0	1	2	3	4
u_n	5	1,5	0,45	0,135	0,0405

3.2. Expression en fonction de *n*

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q.

On a :

$u_1 = u_0 \times q$ $\qquad\qquad$ $u_2 = u_1 \times q = (u_0 \times q) \times q = u_0 \times q^2$

$u_3 = u_2 \times q = (u_0 \times q^2) \times q = u_0 \times q^3$

Plus généralement, on a le résultat suivant :

Théorème : Soit (u_n) une suite géométrique de raison q Alors :

$$u_n = u_0 \times q^n$$

Remarque : Plus généralement, si (u_n) est une suite géométrique de raison q et si n et p sont deux entiers naturels, on a : $u_n = u_p \times q^{n-p}$.

Exemple : Soit (un) la suite arithmétique de premier terme $u_0 = 3$ et de raison 2.

On a : $u_n = u_0 \times q^n = 3 \times 2^n$.

En particulier : $u_{10} = 3 \times 10 = 3072$.

3.3. Somme de termes consécutifs

Théorème : Soit (u_n) une suite géométrique de raison q (avec $q \neq 1$). On note S_n la somme des $(n + 1)$ premiers termes de la suite (u_n), c'est-à-dire :

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n$$

Alors, on a :

$$S_n = u_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Remarque : Il est plus facile de retenir cette formule sous la forme suivante :

$$S = (\text{premier terme}) \times \frac{1 - (\text{raison})^{\text{nbre de termes}}}{1 - \text{raison}}$$

3.4. Limites de suites géométriques

Soit q un nombre réel donné.

1) Si q > 1, alors multiplier par un nombre supérieur à 1 correspond à un agrandissement. Donc, les termes de la suite géométrique (q^n) augmentent indéfiniment lorsque n tend vers +∞ et dépassent tout nombre choisi au départ à partir d'un certain rang. On écrit :

$$\lim_{n \to +\infty} q^n = +\infty$$

2°) Si 0 < q < 1, alors multiplier par un nombre compris entre 0 et 1 correspond à une réduction. Donc, les termes de la suite géométrique (q^n) diminuent indéfiniment lorsque n tend vers +∞ et deviennent plus petits que n'importe quel nombre positif choisi au départ, aussi petit soit-il. On dit que « la limite de q^n lorsque n tend vers +∞, est égale à 0 ». On écrit :

$$\lim_{n \to +\infty} q^n = 0$$

Cours 1 ere Année

Dettes

CHAPITRE II :

Les Intérêts

1. Intérêts

1.1. Notion d'intérêt

L'intérêt est le revenu d'une somme d'argent prêtée (ou placée). Il peut être une dépense ou un revenu.

- Il s'agit d'une dépense pour l'emprunteur, l'intérêt correspond à la rémunération du capital prêté ;
- Il s'agit d'un revenu pour le prêteur, l'intérêt est le revenu tiré du capital prêté.

Le montant de l'intérêt est fonction du capital, du taux de placement et de la durée du placement.

1.2. Eléments nécessaires au calcul de l'intérêt

- **Le capital :** Le montant de l'intérêt varie selon l'importance du capital. L'intérêt est proportionnel au capital (**Capital** ou **principal** : Somme d'argent mise à disposition d'un emprunteur ou placée par un épargnant).
- **Le taux de placement :** Le taux de placement s'exprime le plus souvent sous la forme d'un pourcentage.

Exemples

- taux de 8 %, de 5 %, 10 %, ...
- A la caisse d'épargne, le taux de placement est de 3.5% l'an. Cela signifie qu'une somme de 100 DA placée pendant un an rapporte 3,50 DA d'intérêt.

- **Durée de placement :**

Le montant de l'intérêt varie selon la durée du prêt. Celle -ci peut-être calculée en jours, en quinzaines, en mois ou années.

Le calcul de la durée se fait selon les règles suivantes : Une année compte 360 jours, 24 quinzaines, 12 mois.

➔ Si la durée est calculée en jours, les mois sont comptés à leur juste valeur. Sans autre indication, le mois de Février compte 28 jours.

➔ Si la durée est calculée en quinzaines: on compte les quinzaines à partir du 1er ou du 16 de chaque mois qui suit le dépôt, à partir du 1er ou du 16 qui précède le retrait.

➔ Si la durée est calculée en mois, on ne tient pas compte de la durée réelle des mois.

Exemple : Quelle est la durée d'un placement effectué du 5 Septembre au 15 Décembre ?

Septembre: 30 - 5 = 25
Octobre 31
Novembre 30
Décembre 15

La durée d'un placement effectué est : 101 jours

2. Type d'intérêts

Il existe deux types d'intérêt :

a) **Intérêts simples :** l'intérêt est dit « simple » lorsqu'il est proportionnel à la durée du prêt.
b) **Intérêts composés :** l'intérêt est dit « composé » si à la fin de chaque année, l'intérêt simple produit pendant l'année précédente est ajouté au capital, cet intérêt produisant à son tour des intérêts. (on dit alors que l'intérêt est « capitalisé ».)

2.1. Intérêts simples

- **Définition**

Dans le cas de l'intérêt simple, le capital reste invariable pendant toute la durée du prêt, l'emprunteur doit verser à la fin de chaque période l'intérêt dû.

Les placements d'une durée inférieure à un an ont généralement des intérêts simples.

- **Calcul de l'intérêt simple**

Soit :
C_0 : capital placé.
t : taux d'intérêt.
n : période de placement en année.
I : intérêt rapporté par le capital (C_0).

Alors l'intérêt est donné par :

Intérêt = Capital × taux × durée $\Rightarrow$ **I = C_0 × t × n**

$$I = \frac{C_0 \times t \times n}{100}$$

Exemple
Calculons l'intérêt produit par un capital de 35850 Da placé pendant 3 ans à un taux égal à 11%.
On sait que : C_0 = 35850 Da
t = 11%
n = 3 ans
I = ?

Solution : $I = \frac{C_0 \times t \times n}{100} = \frac{35850 \times 11 \times 3}{100} = \mathbf{11830.5\ Da}$

Remarque
Le taux annuel est désigné comme le **taux nominal** ou le **taux facial**. Pour calculer des intérêts sur une durée inférieure à une année, on peut avoir besoin de déterminer le taux de la période ou le taux périodique.

- **Définition du taux périodique**

Le taux périodique est un **taux proportionnel** si ce taux appliqué à un calcul d'intérêts simples sur toutes les périodes de l'année donne le même résultat que le taux annuel.

Formule générale

$$\text{Taux périodique proportionnel} = \frac{(\text{Taux nominal} \times \text{Durée de la période})}{\text{Durée de l'année.}}$$

Souvent l'intérêt est calculé en fonction du nombre du jour de placement. L'année est prise pour 360 jours et les mois sont comptés pour leur nombre de jours exact.

- Si la durée est en jours $I = \frac{C_0 \times j \times t}{36000}$ (36000 = 100 × 360 jours).
- Si la durée est en mois $I = \frac{C_0 \times m \times t}{1200}$ (1200 = 100 ×12 mois).

Exemples
1- Quel est l'intérêt produit à intérêt simple par un placement d'une somme d'argent de 12500 dinars au taux de 10,5% pendant 96 jours.
2- Quel est l'intérêt produit par un placement de 15.500 dinars au taux de 9,5% pendant 7 mois.

- ➢ **Solution**

1- $I = \frac{C_0 \times j \times t}{36000} = \frac{12500 \times 96 \times 10.5}{36000} = \mathbf{350\ DA}$

2- $I = \frac{C_0 \times m \times t}{1200} = \frac{15500 \times 7 \times 9.5}{1200} = \mathbf{858.95\ DA}$

2.1.1. Valeur acquise ‘ C_n ‘

- **Définition**

En ajoutant à un capital les intérêts qu'il a produit à la suite d'un p lacement, on obtient la somme dont dispose désormais le propriétaire des fonds. Cette somme est la valeur acquise.

$$C_n = C_0 + I$$

$$C_n = C_0 + \frac{C_0 \times t \times n}{100}$$

$$C_n = C_0 + n \times (\frac{C_0 \times t}{100})$$

2.2. Intérêts composés

2.2.1. Définition

On dit qu'un capital est placé à intérêt composé lorsqu'à la fin de la première période, l'intérêt simple de la première période est ajouté au capital, on parle alors de capitalisation des intérêts. La capitalisation des intérêts est généralement annuelle, mais elle peut être semestrielle, trimestrielle ou mensuelle (Un capital est placé à intérêts composés lorsque le montant des intérêts produits à la fin de chaque période de placement s'ajoute au capital placé pour devenir productif d'intérêts de la période suivante).

Les intérêts des placements de plus d'un an sont généralement des intérêts composés.

- **Calcul de l'intérêt composé:**

Soient :

Un capital $\mathbf{C_0}$

t: un taux d'intérêt

n : la durée de placement

Nous pouvons calculer l'intérêt obtenu par ce capital au bout d'un an (n =1).

- **Pour la $1^{ère}$ période : Co $\longrightarrow$ 1an**

Le calcul de l'intérêt donne :

$\mathbf{I = C_0 \times t}$

Ce qui donne à la fin de la 1ère année, un capital $\mathbf{C_1}$

$C_1 = C_0 + I$

$C_1 = C_0 + \mathbf{C_0 \times t}$

$C_1 = C_0 (1 + t)$

- **Pour la $2^{ème}$ période : C_1 $\longrightarrow$ 2an**

Le calcul de l'intérêt donne :

$I = C_1 \times t$

Ce qui donne à la fin de la $2^{ème}$ année, un capital C_2

$C_2 = C_1 + I$

$C_2 = C_1 + C_1 \times t$

$C_2 = C_1 (1 + t)$, avec $C_1 = C_0 (1 + t)$ on a:

$C_2 = C_0 (1 + t) \times (1 + t)$

$C_2 = C_0 (1 + t)^2$

2.2.2. Valeur acquise ‘ C_n ‘

- **A la fin de la période n : C_n $\longrightarrow$ n ans**

$$\mathbf{C_n = C_0 (1 + t)^n}$$

- **Méthode de Calcul d'un taux de placement**

Connaître le montant du capital placé, la valeur acquise et le taux périodique. Transformer la formule de capitalisation :

$$C_n = C_0\ (1+t)^n\ \text{équivaut à}\ (1+t)^n = \frac{C_n}{C_0}$$

$$Soit : 1 + t = (\frac{C_n}{C_0})^{\frac{1}{n}} \quad d'ou \ \ t = (\frac{C_n}{C_0})^{\frac{1}{n}} - 1$$

- **Méthode de Calcul d'une durée de placement**

Connaître le montant du capital placé, la valeur acquise et le taux périodique. Transformer la formule de capitalisation :

$$C_n = C_0\ (1+t)^n\ \text{équivaut à}\ (1+t)^n = \frac{C_n}{C_0}$$

Utiliser le logarithme népérien (ou décimal) pour déterminer la valeur de *n* placée en exposant :

$$ln(1+t)^n = \ln\frac{C_n}{C_0}\ soit\ nln\ (1+t) = ln\frac{C_n}{C_0}$$

$$d'ou\ n = \frac{ln\frac{C_n}{C_0}}{ln\ (1+t)}$$

2.2.3. Différents taux proportionnels

Le taux utilisé doit correspondre à la période de placement choisie (année, semestre, trimestre et mois)

	Taux proportionnels correspondants		
	Taux semestriel	Taux trimestriel	Taux mensuel
Taux annuel (t_a)	$t_s = t_a/2$	$t_t = t_a/4$	$t_m = t_a/12$

Exemple

A quel taux semestriel a été placé un capital de 5000 DA qui, en 102j, a rapporté 85 DA d'intérêts ?

- **Solution**

Soit t_a, le taux annuel de placement

On sait que :

C_0 = 5000 DA

t_a = ?

n = 102 j

I = 85 DA

$$I = \frac{C_0 \times t \times n}{360} = \frac{5000 \times t \times 102}{360} = 85\ DA$$

t = 0,06

D'où le taux semestriel de placement

$t_s = t_a/2$ =0.06/2 = 0,03 soit 3%.

4. Applications

- On place un capital de 8 000 DA pendant 72 jours au taux annuel de 6,5 %. Calculer l'intérêt et la valeur acquise à l'issue du placement.
- Calculer la valeur acquise d'un capital de 8 000 DA placé pendant 5 ans au taux annuel de 6,5 %. En déduire le montant des intérêts. (capitalisation annuelle)
- Un capital de 12 000 DA est placé pendant 4 ans ; la capitalisation des intérêts est mensuelle. A l'issue du placement, la valeur acquise se monte à 15 245,87 DA. Calculer le taux mensuel t_m de l'intérêt.
- Un capital de 7 000 DA est placé à un taux annuel de 6 %. La capitalisation des intérêts est mensuelle. La valeur acquise se monte à 10 642,59 DA. Calculer en mois puis en années, la durée du placement (utiliser les taux proportionnels).

Représenter les vues les plus représentatives