Université Mouloud MAMMERI de Tizi-Ouzou **Mai 2019**

FSESCSG

Première Année LMD, Section « B »

Module : Mathématiques II

Série TD N° 03

Exercice 1 – On considère les matrices à coefficients réels :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

1) Calculer s'ils ont un sens les produits $AB, BA, AC, CA, BC, CB, B^2$.
2) En déduire, sans plus de calcul, que A et C sont inversibles et préciser leurs inverses.

Exercice 2 – Soit A la matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ et B la matrice de $\mathcal{M}_{2,3}(\mathbf{R})$ définies par :

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad .$$

Si elles ont un sens, calculer les matrices AB, BA, A^2 , B^2 et $A + 2\,\mathrm{Id}_2$.

Exercice 3 – Soit M la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ définie par :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad .$$

1) Calculer le déterminant de M, sa comatrice et l'inverse de M.

Dirigé par : M[eur] **BELHITECHE – EL HADI et M**[eur] **MESSAD - AHMED**

Correction de l'exercice 1

1)

$$AB = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \quad .$$

BA n'a pas de sens car la taille des lignes de B n'est pas égale à celle des colonnes de A.

$$AC = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = -2\mathrm{Id}_2 \quad .$$

$$CA = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = -2\mathrm{Id}_2 \quad .$$

$$CB = \begin{pmatrix} 22 & -15 & -7 \\ -10 & 7 & 3 \end{pmatrix} \quad .$$

BC n'a pas de sens car la taille des lignes de de B n'est pas égale à celle des colonnes de C.
B^2 n'a pas de sens car la taille des lignes de de B n'est pas égale à celle des colonnes de B.

2) Nous avons : $AC = CA = -2\mathrm{Id}_2$, nous en déduisons :

$$A(-\frac{1}{2}C) = (-\frac{1}{2}C)A = \mathrm{Id}_2 \quad .$$

Il en résulte que la matrice A est inversible, d'inverse :

$$A^{-1} = -\frac{1}{2}C = \begin{pmatrix} -2 & \frac{3}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

De même :

$$(-\frac{1}{2}A)C = C(-\frac{1}{2}A) = \mathrm{Id}_2 \quad .$$

Il en résulte que la matrice C est inversible, d'inverse :

$$C^{-1} = -\frac{1}{2}A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \quad .$$

Correction de l'exercice 2 :

$$AB = \begin{pmatrix} -7 & 3 & -11 \\ -2 & 1 & -3 \end{pmatrix} \quad .$$

La matrice BA n'a pas de sens.

$$A^2 = AA = \begin{pmatrix} 13 & -9 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \quad .$$

La matrice B^2 n'a pas de sens.

$$A + 2\,\mathrm{Id}_2 = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \quad .$$

Correction de l'exercice 3 :

1)

$$\begin{aligned} \det M &= 1 \det \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - (-2) \det \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + 0 \det \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad . \\ &= -1 + 2 = 1 \end{aligned}$$

Le déterminant de M est non nul, la matrice carrée M est donc inversible. La comatrice de M est donnée par la formule :

$$\mathrm{Com}\,(M) = \begin{pmatrix} +\det \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} & -\det \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & +\det \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ -\det \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} & +\det \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & -\det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ +\det \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} & -\det \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} & +\det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \quad .$$

Soit :

$$\mathrm{Com}\, M = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 3 \end{pmatrix} \quad .$$

On a alors :

$$M^{-1} = \frac{1}{\det M}\,{}^t(\mathrm{Com} M) = {}^t(\mathrm{Com} M) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \quad .$$

Série de TD N° 3 : Généralités sur les matrices

Exercice 1

1. Calculer lorsque c'est possible :

$$\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 7 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad \begin{pmatrix} 12 & 1 & -9 \\ -8 & 3 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad ; \quad -3\begin{pmatrix} 12 & 1 & -9 \\ -8 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

2. Considérons les matrices A, B et C à coefficients réels :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 3 & -2 & 6 \end{pmatrix} \quad ; \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \quad ; \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

- **a.** Calculer, s'ils ont un sens, les produits : AB ; BA ; AC ; CA ; A^2
- **b.** Montrer que la matrice D est inversible puis calculer D^{-1}

Exercice 2

Soient les systèmes d'équations linéaires :

$$(I)\begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ 5x + 7y = -3 \end{cases} \quad (II)\begin{cases} \alpha - \gamma = 1 \\ \alpha + \beta + \gamma = 2 \\ \beta + \gamma = 3 \end{cases} \quad (III)\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 3x + 2y + z = 6 \\ y - z = 3 \end{cases}$$

1. Définir les matrices A_1, A_2, A_3 et les vecteurs colonnes X_1, X_2, X_3, B_1, B_2 *et* B_3 tels que les systèmes donnés soient respectivement équivalent aux égalités matricielles : $A_1.X_1=B_1$, $A_2.X_2=B_2$ *et* $A_3.X_3=B_3$
2. Calculer les mineurs M_{12}, M_{22} et M_{32} pour la matrice A_2.
3. Résoudre les systèmes d'équations linéaires *(I), (II)* et *(III)*

Dirigé par : M^eur BELHITECHE – EL HADI et M^eur MESSAD - AHMED

Corréction série N°: 6

Exercice n°: 1 :

1/ * $\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 7 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (3+5) & (-5-1) \\ (7+4) & (2+0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -6 \\ 11 & 2 \end{pmatrix}$

* $\begin{pmatrix} 12 & -1 & -9 \\ -8 & 3 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ le calcul n'est pas possible car le nbre de colonne de la première matrice ≠ du nombre de colonne de la 2ème

* $-3\begin{pmatrix} 12 & 1 & -9 \\ -8 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 36 & -3 & 27 \\ 24 & -9 & -6 \end{pmatrix}$

2/

a/ * $A \times B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 3 & -2 & 6 \end{pmatrix}$

le calcul de A×B est possible car le nbre de colonne de A est égale au nbre de ligne de B

A est de dimension (2×2), B est de dimension (2×3) donc la matrice résultante aura une dimension de (2×3)

$A \times B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 3 & -2 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1\times 2 + 3\times 3) & (1\times 0)+(3\times -2) & (1\times -4 + 3\times 6) \\ (2\times 2 + -4\times 3) & (2\times 0)+(-4\times -2) & (2\times -4 + -4\times 6) \end{pmatrix}$

$A \times B = \begin{pmatrix} 11 & -6 & 14 \\ -8 & 8 & -32 \end{pmatrix}$

* le calcul de B×A n'est pas possible ; car le nbre de colonne de B ≠ du nbre de ligne de A.

* le calcul de A×C et de C×A est possible car il sont des matrice carrée de rang 2, mais A×C ≠ C×A

$* \; A \times C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1\times 1 + 3\times -1) & (1\times 2 + 3\times -2) \\ (2\times 1 + -4\times -1) & (2\times 2 + -4\times -2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -5 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$

$* \; C \times A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1\times 1 + 2\times 2) & (1\times 3 + 2\times -4) \\ (-1\times 2 + -2\times 2) & (-1\times 3 + -2\times -4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -5 \\ -6 & 5 \end{pmatrix}$

* A^2 matrice carrée du rang 2, le calcul est possible

$A^2 = A \times A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1\times 1 + 3\times 2) & (1\times 3 + 3\times -4) \\ (2\times 1 + -4\times 2) & (2\times 3 + -4\times -4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -5 \\ -6 & 22 \end{pmatrix}$

b/ pour que la matrice D soit inversible; il faudrait que $\det D \neq 0$

$D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$; on fixe la première colonne

$\det D = +1 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3 + 6 + 0 = 3 \neq 0$

donc D admet une matrice inverse $D^{-1} = \dfrac{1}{\det D} \, {}^t\tilde{D}$

* détermination de la matrice des cofacteurs $\tilde{D}$

$$\tilde{D} = \begin{bmatrix} +\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 3 & 3 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$${}^t\tilde{D} = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow D^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2/3 & 1/3 \\ 1 & -1/3 & 2/3 \\ 1 & -1/3 & -1/3 \end{pmatrix}$$

Exercice n°2 :

1/ $A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$; $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $A_3 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

$X_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$; $X_2 = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$; $X_3 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$; $B_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$; $B_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

$B_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$

2/ $\tilde{A}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

$M_{12} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$; $M_{22} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1$; $M_{32} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$

3/ Résolution des systèmes d'équations :

* Système I :

$A_1 . X_1 = B_1 \Rightarrow A_1^{-1} . A_1 . X_1 = A_1^{-1} . B_1 \Rightarrow X_1 = A_1^{-1} . B_1$

détermination de la matrice inverse A_1^{-1}

$A_1^{-1} = \frac{1}{\det A_1} {}^t\tilde{A}_1$

$\det A_1 = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = (2 \times 7) - (3 \times 5) = 14 - 15 = -1 \neq 0$ donc la matrice est inversible ; $A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$

$\tilde{A}_1 = \begin{pmatrix} 7 & -5 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow {}^t\tilde{A}_1 = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$

$A_1^{-1} = -1 \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow X_1 = \begin{pmatrix} -7 & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -16 \\ -1 \end{pmatrix}$

$X_1 = \begin{pmatrix} x = -16 \\ y = -1 \end{pmatrix}$ sont la solution du système I

* Système II :

$A_2 . X_2 = B_2 \Rightarrow X_2 = A_2^{-1} . B_2$

determination de la matrice A_2^{-1} : $A_2^{-1} = \frac{1}{\det A_2} {}^t\tilde{A}_2$

$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; on fixe la 2ème colonne.

$\det A_2 = -a_{12} M_{12} + a_{22} M_{22} - a_{32} M_{32} = 0 + (1 \times 2) + 0 = 2 \neq 0 \Rightarrow$

on conclut que A_2 est inversible.

$A_2^{-1} = \frac{1}{\det A_2} {}^t com A_2 = \frac{1}{\det A_2} {}^t\tilde{A}_2$

$$\tilde{A}_2 = \begin{bmatrix} +\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$${}^t\tilde{A}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A_2^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1/2 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$X_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -1 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}+0+\frac{3}{2} \\ 0+2-3 \\ -\frac{1}{2}+0+\frac{3}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$X_2 = \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \\ z = 1 \end{cases}$$

* <u>système III</u> : même chose que le système II.