corrigé type rattrapage II 17/09/18

Exercice n°1 : /10

$$C=\begin{pmatrix}5&2&1\\0&0&0\\3&5&1\end{pmatrix},\quad D=\begin{pmatrix}2&1&0\\3&2&0\\1&1&1\end{pmatrix}$$

1) calcul de :

$$D^2=\underset{3\times3}{D}\times\underset{3\times3}{D}=\begin{pmatrix}2&1&0\\3&2&0\\1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1&0\\3&2&0\\1&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7&4&0\\12&7&0\\6&4&1\end{pmatrix}\quad 1$$

$$\underset{3\times3}{C}\times\underset{3\times3}{D}=\begin{pmatrix}5&2&1\\0&0&0\\3&5&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1&0\\3&2&0\\1&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}17&10&1\\0&0&0\\22&14&1\end{pmatrix}\quad 1$$

$$2D-C=\begin{pmatrix}4&2&0\\6&4&0\\2&2&2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}5&2&1\\0&0&0\\3&5&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0&-1\\6&4&0\\-1&-3&1\end{pmatrix}\quad 0.5$$

2) Montrons que C et D sont inversibles :

C est inversible si SSSi : $\det C\neq 0$ 0.5

$$\det C=5\begin{vmatrix}0&0\\5&1\end{vmatrix}-2\begin{vmatrix}0&0\\3&1\end{vmatrix}+1\begin{vmatrix}0&0\\3&5\end{vmatrix}=0$$

$\det C=0$ 0.5 $\Rightarrow$ C n'est pas inversible 0.5

D est inversible si : $\det D\neq 0$.

$$\det D=+2\begin{vmatrix}2&0\\1&1\end{vmatrix}-1\begin{vmatrix}3&0\\1&1\end{vmatrix}+0=4-3=1\neq0\quad 0.5$$

$\det D\neq 0\Rightarrow$ D est inversible et admet une matrice inverse D^{-1} 0.5

- calcul de la matrice inverse : $D^{-1}=\dfrac{{}^{c}[Q^t]}{\det D}$ 0.5

+ calcul de la matrice cofacteur :

$Q_{ij}=(-1)^{i+j}\det ij$

$q^c_{11}=+\begin{vmatrix}2&0\\1&1\end{vmatrix}=2$ 0.75 $\quad q^c_{21}=-\begin{vmatrix}1&0\\1&1\end{vmatrix}=-1\quad q^c_{31}=0$

$q^c_{12}=-\begin{vmatrix}3&0\\1&1\end{vmatrix}=-3\quad q^c_{22}=+\begin{vmatrix}2&0\\1&1\end{vmatrix}=2$ 0.75 $\quad q^c_{32}=0$ 0.75

$q^c_{13}=+\begin{vmatrix}3&2\\1&1\end{vmatrix}=1\quad q^c_{23}=-\begin{vmatrix}2&1\\1&1\end{vmatrix}=-1\quad q^c_{33}=1$

$$\underset{3\times3}{Q^c}=\begin{pmatrix}2&-3&1\\-1&2&-1\\0&0&1\end{pmatrix}\ 0.5\Rightarrow {}^{c}[Q^t]=\begin{pmatrix}2&-1&0\\-3&2&0\\1&-1&1\end{pmatrix}\quad 0.5$$

$$D^{-1}=\frac{1}{\det D}\,{}^{c}[Q^t]=\begin{pmatrix}2&-1&0\\-3&2&0\\1&-1&1\end{pmatrix}\quad 0.5$$

II) Résolution du système d'équations :

Écriture sous forme matricielle :

$$\underbrace{\begin{pmatrix}2&1&0\\3&2&0\\1&1&1\end{pmatrix}}_{D}\underbrace{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}}_{X}=\underbrace{\begin{pmatrix}0\\-1\\-1\end{pmatrix}}_{B}\quad 0.5$$

$D\times X=B\Rightarrow X=D^{-1}.B$ (D^{-1} déjà calculée)

$$X=\begin{pmatrix}2&-1&0\\-3&2&0\\1&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\-1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\quad 0.75$$

Exercice n°2 /4

calcul d'intégrale :

1) $\int \ln x e^{x} dx = \int U.V' dx = UV - \int U'V dx$

$U = \ln x \Rightarrow U' = \frac{1}{x}$

$V' = e^{x} \Rightarrow V = e^{x}$

$\int \ln x e^{x} dx = \ln x e^{x} - \int \frac{1}{x} e^{x} dx$ 2

2) $\int (3x^2+1) dx = x^3 + x + C$ 1

3) $\int (2x+1+\frac{6}{x-1}) dx = x^2 + x + 6\ln(x-1) + C$ 1

Exercice n°3 /6

$f(x,y) = xy e^{-(x^2+y^2)}$

1) $Df = \mathbb{R}^2$ 0,5

2) calcul des dérivées premières :

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = y e^{-(x^2+y^2)} + xy(-2x) e^{-(x^2+y^2)}$$

$$= y e^{-(x^2+y^2)} (1-2x^2)$$ 1

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = x e^{-(x^2+y^2)} - 2xy(y) e^{-(x^2+y^2)}$$

$$=$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = x e^{-(x^2+y^2)} (1-2y^2).$$ 1

3) Points critiques de f :

$$\nabla f = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} y e^{-(x^2+y^2)} (1-2x^2) \\ x e^{-(x^2+y^2)} (1-2y^2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$ 0,5

$\Rightarrow y e^{-(x^2+y^2)} (1-2x^2) = 0 \Rightarrow y = 0$ ou $1-2x^2 = 0$

et

$x e^{-(x^2+y^2)} (1-2y^2) = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $1-2y^2 = 0$ 0,5

$1-2x^2 = 0 \Rightarrow x = \mp\sqrt{\frac{1}{2}}$ 0,5

$1-2y^2 = 0 \Rightarrow y = \mp\sqrt{\frac{1}{2}}$

donc f admet 5 points critiques.

$S = \{(0,0), (\sqrt{\frac{1}{2}},0), (-\sqrt{\frac{1}{2}},0), (0,\sqrt{\frac{1}{2}}), (0,-\sqrt{\frac{1}{2}})\}$. 0,5

4) nature de ces points critiques (au choix)

matrice Hessienne : $Hf(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \end{bmatrix}$

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} = y(-2x)e^{-(x^2+y^2)} - 4xye^{-(x^2+y^2)} - 2x(xy)(-2x)e^{-(x^2+y^2)}$$

$$= -2xye^{-(x^2+y^2)} - 4xye^{-(x^2+y^2)} + 4x^3ye^{-(x^2+y^2)}$$

$$= -2xe^{-(x^2+y^2)}(y + 2y - 2x^2y) = -2xye^{-(x^2+y^2)}[3 - 2x^2]$$ 0.5

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} = -2xye^{-(x^2+y^2)} - 4xye^{-(x^2+y^2)} + 4xy^3e^{-(x^2+y^2)}$$

$$= -6xye^{-(x^2+y^2)} + 4xy^3e^{-(x^2+y^2)}$$

$$= -2xye^{-(x^2+y^2)}(3 - 2y^2)$$

$$= -2xye^{-(x^2+y^2)}(3 - 2y^2)$$ 0.5

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x} = e^{-(x^2+y^2)} - 2y^2e^{-(x^2+y^2)} - 2x^2e^{-(x^2+y^2)} + 4y^2x^2e^{-(x^2+y^2)}$$ 0.5

$$= e^{-(x^2+y^2)}[1 - 2y^2 - 2x^2 + 4y^2x^2]$$

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} = e^{-(x^2+y^2)}[1 - 2y^2 - 2x^2 + 4y^2x^2].$$

$$H_f(x,y) = \begin{bmatrix} -2xye^{-(x^2+y^2)}[3-2x^2] & [1-2y^2-2x^2+4x^2y^2]e^{-(x^2+y^2)} \\ [1-2y^2-2x^2+4x^2y^2]e^{-(x^2+y^2)} & -2xye^{-(x^2+y^2)}(3-2y^2) \end{bmatrix}$$

au point $(0,0)$:

$$H_f(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & e \\ e & 0 \end{bmatrix}$$ 0.25

$\det H_f = -e^2 < 0 \Rightarrow$ le point critique $(0,0)$ est pas un point critique. 0.25

Faculté des sciences économiques, commerciales et des sciences de gestion
1ère année tronc commun
Sections: A et B
Module : Mathématiques II

Le 17/09/18
Durée : 01h30

Examen de rattrapage

Exercice $n^\circ 01(10pts)$:

I) Soient les matrices C et D définies par :

$$C = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1) Effectuer les opérations suivantes : D^2, $C * D, 2D - C$

2) Les matrices Cet D sont elles inversibles ? Calculer leurs matrices inverses dans le cas possible.

II) A l'aide du calcul matriciel, résoudre le système d'équations linéaires suivant :

$$\begin{cases} 2x + y = 0 \\ 3x + 2y = -1 \\ x + y + z = -1 \end{cases}$$

Exercice $n^\circ 02\ (04pts)$:

Calculer les intégrales suivantes :

1) $\int \ln xe^x\, dx$ (intégrale par partie)
2) $\int (3x^2 + 1)\, dx$
3) $\int (2x + 1 + \frac{6}{x-1})\, dx$

Exercice $n^\circ 03(06pts)$:

Soit la fonction $f(x, y)$ définie par :

$$f(x, y) = xye^{-(x^2+y^2)}$$

1) Déterminer le domaine de définition de la fonction f.
2) Calculer $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$.
3) Déterminer les points critiques de f.
4) Déterminer la nature de ces points.

Bonne chance