(7 pts) Corrigé type Rattrapage (Sujet 2) ① MATHS II Semestre II

EX01

[1] $A^2 = A \cdot A$ le produit est défini (0,25)

• $A^2 = \begin{pmatrix} (1\ 2)\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix} & (1\ 2)\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix} \\ (4\ -3)\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix} & (4\ -3)\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -4 \\ -8 & 17 \end{pmatrix}$

• $2A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 8 & -6 \end{pmatrix}$; $A^2 + 2A = \begin{pmatrix} 11 & 0 \\ 0 & 11 \end{pmatrix} \cdots (I)$

• $11 I = \begin{pmatrix} 11 & 0 \\ 0 & 11 \end{pmatrix} \cdots (II)$; $(I) = (II)$ donc $A^2 + 2A = 11 I_2$

[2] $A^2 + 2A = 11 I_2 \Leftrightarrow \frac{1}{11}\left[A^2 + 2A\right] = I$

$\Leftrightarrow A \cdot \left[\frac{1}{11}(A + 2I)\right] = I$

$A \cdot A^{-1} = I$ donc

$A^{-1} = \frac{1}{11} A + \frac{2}{11} I_2 = \frac{1}{11}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} + \frac{2}{11}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} \frac{1}{11} & \frac{2}{11} \\ \frac{4}{11} & -\frac{3}{11} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{2}{11} & 0 \\ 0 & \frac{2}{11} \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} \frac{3}{11} & \frac{2}{11} \\ \frac{4}{11} & \frac{-1}{11} \end{pmatrix} = A^{-1}}$

[3] Confirmation du résultat

• $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = -3 - 8 = -11 \neq 0$ donc A régulière inversible.

• $A' = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$

• $\bar{A} = \begin{pmatrix} +|-3| & -|2| \\ -|4| & +|1| \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$

• $A^{-1} = \frac{\bar{A}}{|A|} = \frac{+1}{-11}\begin{pmatrix} -3 & -2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{11} & \frac{2}{11} \\ \frac{4}{11} & \frac{-1}{11} \end{pmatrix}$ et c'est la même réponse que la 1ère méthode

EX02 (7 pts)

[1] B est symétrique ssi $B = B'$

$B' = \begin{pmatrix} 5 & a & b \\ -1 & 1 & -3 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 1 \\ a & 1 & -3 \\ b & -3 & 1 \end{pmatrix}$ on tire $\begin{cases} a = -1 \\ b = 1 \end{cases}$

[2] $B = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$

① $|B| = \left|\begin{matrix} 5 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & -3 & 1 \end{matrix} \begin{matrix} 5 & -1 \\ 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{matrix}\right| = [5 + 3 - 6] - [-2 + 45 + 1] = 2 - 44 = -42$

② $3BI = 3B$ car I est l'élément neutre du x+ matriciel

$3BI_3 = \begin{pmatrix} 15 & -3 & 3 \\ 6 & 3 & -9 \\ 3 & -9 & 3 \end{pmatrix}$

③ $5B - 3B' = \begin{pmatrix} 25 & -5 & 5 \\ 10 & 5 & -15 \\ 5 & -15 & 5 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -3 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} 25 & -5 & 5 \\ 10 & 5 & -15 \\ 5 & -15 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 15 & 6 & 3 \\ -3 & 3 & -9 \\ 3 & -9 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & -11 & 2 \\ 13 & 2 & -6 \\ 2 & -6 & 2 \end{pmatrix}$

④ $tr(B) = \sum b_{ii} = 5 + 1 + 1 = \boxed{7}$

$tr(B') = tr(B) = \boxed{7}$

$tr(B.B') = tr(B) \cdot tr(B') = 7 \cdot 7 = \boxed{49}$

[3] • $C_{(3,4)} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 7 & 9 \\ 0 & 5 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & 6 & 3 \end{pmatrix}$

[4] Le format de C : C est une matrice rectangulaire de 3 lignes et de 4 colonnes. La matrice C n'est pas inversible car elle n'est pas carrée.

page(3)

Exo 3 (6pts) La forme matricielle $A.X = B \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ 0,5

la solution du système par la méthode de Pivot de Gauss est donnée par $B^* / (A \,\vdots\, I \,\vdots\, B) \xrightarrow{TESL} (I \,\vdots\, A^{-1} \,\vdots\, B^*)$ 0,5

$$T_0 \quad \left|\begin{array}{ccc:ccc:c|l} 1^{\text{Pivot}} & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & L_1^0 \\ -2 & 2 & -2 & 0 & 1 & 0 & 5 & L_2^0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & 0 & 1 & 2 & L_3^0 \end{array}\right.$$ 0,5

$$T_1 \quad \left|\begin{array}{ccc:ccc:c|l} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & L_1' = L_1^0 \\ 0 & 6^{P} & 0 & 2 & 1 & 0 & 7 & L_2' = L_2^0 + 2L_1' \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 1 & L_3' = L_3^0 - L_1' \end{array}\right.$$ 1

$$T_2 \quad \left|\begin{array}{ccc:ccc:c|l} 1 & 0 & 1 & \frac{2}{6} & -\frac{2}{6} & 0 & -\frac{8}{6} & L_1'' = L_1' - 2L_2'' \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{6} & \frac{1}{6} & 0 & \frac{7}{6} & L_2'' = L_2'\left(\frac{1}{6}\right) \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{8}{6} & -\frac{1}{6} & 1 & -\frac{1}{6} & L_3'' = L_3' - L_2'' \end{array}\right.$$ 1

$$T_3 \quad \left|\begin{array}{ccc:ccc:c|l} 1 & 0 & 0 & \frac{10}{6} & -\frac{1}{6} & -1 & -\frac{7}{6} & L_1''' = L_1'' - L_3''' \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{6} & \frac{1}{6} & 0 & \frac{7}{6} & L_2''' = L_2'' \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{8}{6} & -\frac{1}{6} & 1 & -\frac{1}{6} & L_3''' = L_3'' \end{array}\right.$$ 1

$\underbrace{\qquad}_{I} \qquad \underbrace{\qquad}_{A^{-1}} \qquad \underbrace{\quad}_{B^*}$

alors cette solution $B^* = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{7}{6} & 0,5 \\ y = \frac{7}{6} & 0,5 \\ z = -\frac{1}{6} & 0,5 \end{cases}$