UMMTO/ FSECG/ 1ère année LMD
Sections : A et B
Module : Mathématiques I

15 MAI 2018
Durée : 1h30

Examen de moyenne durée du semestre 1

Exercice 1 : (5 points)

Soient un taux d'intérêt simple annuel de 5% et un capital de 10 000 DA.

I. 1. Calculer l'intérêt commercial produit du 24 mars au 26 juillet de la même année (les mois sont pris à leur juste valeur).

2. Quel taux d'intérêt simple mensuel faudrait appliquer pour respecter les conditions de placement.

II. Sachant que le placement a conduit à une valeur acquise de 10 100 DA :

1. déterminer la durée du placement.
2. En considérant une capitalisation mensuelle d'une durée de 8mois, calculer le taux d'intérêt mensuel qu'il faudrait utiliser pour que l'intérêt produit se révèle identique à celui obtenu en ayant recours au taux d'intérêt annuel simple.(question I)

Exercice 2 : (6 points)

1. Simplifier les expressions suivantes :

$\frac{e^{-\ln\frac{1}{3}}}{3}$; $e^{\sqrt{\ln(3x-2)}}$

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

$\ln(x-1)+l(x+1)\geq \ln 3$; $e^{4x}+1=2e^{2x}$; $(2^{x-1})^2=1$

3. Déterminer les limites suivantes :

$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}ln\frac{x}{2}$; $\lim_{x\to+\infty}xe^{-2x}$

Exercice 3 : (9 points)

Soient f, g et h trois fonctions définies par :

$f(x)=\frac{1}{x^2-4}$; $g(x)=x^3+3x^2+5$; $h(x)=\sqrt{-2x+4}$

1. Déterminer respectivement les domaines de définition D_f, D_g et D_h des fonctions $f(x)$, $g(x)$ et $h(x)$.
2. Déterminer les ensembles (avec l'écriture symbolique) : $D_f\cup D_h$, $C_{D_g}^{D_f}$, D_g/D_h
3. Déterminer le cardinal et la partition de l'ensemble définie par le $C_{D_g}^{D_f}$
4. Calculer les extremums de la fonction $g(x)$. Définir leur nature en justifiant votre réponse.
5. Déduire les points d'inflexions de la fonction $g(x)$.
6. Etudier la parité de f.
7. Etudier la dérivabilité de f en $x_0=1$. En déduire sa continuité.
8. Etudier la variation de h (limites aux bornes de D_f, première dérivé, tableau de variation, intersection avec les axes et la représentation graphique).

Bon Courage

Correction du 1er EMD MATH

Exercice n°1 (5 points)

I/

1. Calcul de l'intérêt commercial : $I = C_0 \times n \times t_a$

$n = 24$ mars $\longrightarrow$ 26 juillet

Calcul de la durée du placement :

$n = j = 8$ jrs (mars) + 30 jrs (Avril) + 31 jrs (Mai) + 30 jrs (juin) + 26 (juillet) = 125 jrs (0,5)

$\left.\begin{array}{l}1 \text{ année} \longrightarrow 360 \text{ jrs} \\ n \longrightarrow 125 \text{ jrs}\end{array}\right\} n = \frac{125\times 1}{360} \simeq 0,35$ (0,5)

$I = 10\,000 \times 0,35 \times \frac{5}{100} = 175.00$ DA (0,5)

2. le taux d'intérêt simple mensuel :

$t_a = 5\%$

on sait que $t_m = \frac{t_a}{12} = \frac{5}{12\times 100} \simeq 0.0042 \simeq 0,42\%$ (0,5)

II/

1. La durée du placement :

$C_n = 10\,100$ DA

$C_n = C_0 + I = C_0 + C_0 \times n \times t_a = C_0(1+nt_a) \Rightarrow C_n = C_0(1+nt_a)$

$\frac{C_n}{C_0} = 1 + nt_a \Rightarrow n = \frac{\frac{C_n}{C_0} - 1}{t_a} = \frac{\frac{10\,100}{10\,000} - 1}{0.05} = 0,2$ (0,5) (0,5)

$j = 0,2 \times 360$ jrs $= 72$ jrs (0,5)

2. Calcul de t_m pour une capitalisation mensuelle :

$I_{tot} = 173,61$ DA

Capitalisation mensuelle $\Rightarrow$ Intérêt composé.

$C_n = C_0 + I_{tot} \Rightarrow C_0(1+t_a)^n = C_0 + I_{tot}$

$\Rightarrow (1+t_a)^n = 1 + \frac{I_{tot}}{C_0} \Rightarrow 1+t_a = \left(1+\frac{I_{tot}}{C_0}\right)^{\frac{1}{n}}$

$\Rightarrow t_a = \left(1+\frac{I_{tot}}{C_0}\right)^{\frac{1}{n}} - 1 \quad \dots (*)$

$m = 8$ mois donc $(*) \Rightarrow t_m = \left(1+\frac{I_{tot}}{C_0}\right)^{\frac{1}{m}} - 1$ (1)

$t_m = \left(1+\frac{17500}{10000}\right)^{\frac{1}{8}} - 1 = 0,\quad = \quad \%$ (0,5)

Exercice n°2 (6 points)

1/ * $\frac{e^{-\ln\frac{1}{3}}}{3} = \frac{e^{\ln(\frac{1}{3})^{-1}}}{3} = \left(\frac{1}{3}\right)^{-1} \times \frac{1}{3} = \frac{3}{3} = 1$ (0,5)

* $e^{\sqrt{\ln(3x-2)}}$ (la fonction ne peut être simplifiée) (0,5)

2/ * $\ln(x-1) + \ln(x+1) \geq \ln 3 \Rightarrow \ln[(x-1)(x+1)] \geq \ln 3$

La fonction $\ln[(x-1)(x+1)]$ est définie si et ssi $(x-1)(x+1) > 0$

$(x-1)(x+1) = 0 \Rightarrow (x=1) \vee (x=-1)$

x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
$(x-1)$	$-$		$-$	0	$+$
$(x+1)$	$-$	0	$+$		$+$
$(x-1)(x+1)$	$+$	0	$-$	0	$+$

$D_f =]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$ (0,5)

$\ln[(x-1)(x+1)] \geq \ln 3 \Rightarrow (x-1)(x+1) \geq 3 \Rightarrow x^2 - x + x - 1 \geq 3$

$\Rightarrow x^2 - 1 - 3 \geq 0 \Rightarrow x^2 - 4 \geq 0 \Rightarrow (x-2)(x+2) \geq 0$

$\Rightarrow x \in]-\infty; -2] \cup [2; +\infty[$

On sait que toutes les solutions doivent appartenir à D_f donc :

$S = \{]-\infty; -2] \cup [2; +\infty[\}$ (0,5)

* $e^{4x} + 1 = 2e^{2x} \Rightarrow e^{4x} - 2e^{2x} + 1 = 0 \Rightarrow (e^{2x} - 1)^2 = 0$ (0,25)

$e^{2x} - 1 = 0 \Rightarrow e^{2x} = 1 \Rightarrow \ln e^{2x} = \ln 1 \Rightarrow 2x = 0 \Rightarrow x = 0$ (0,25)

$D_f = \mathbb{R} \Rightarrow x \in D_f$ donc $S = \{0\}$ (0,5)

* $(2^{x-1})^2 = 1 \Rightarrow e^{\ln(2^{x-1})^2} = e^{2\ln(2^{x-1})} = e^{2\ln(e^{(x-1)\ln 2})} = e^{2(x-1)\ln 2}$

$e^{2(x-1)\ln 2} = 1 \Rightarrow e^{2(x-1)\ln 2} = e^0 \Rightarrow 2x\ln 2 - 2\ln 2 = 0$

$\ln 2 = 2\ln 2 \Rightarrow x = \frac{2\ln 2}{2\ln 2} \Rightarrow x = 1$ donc $S = \{1\}$ (1)

3/ * $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2}\ln\frac{x}{2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\frac{x}{2}}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} 4\frac{\ln\frac{x}{2}}{(\frac{x}{2})^2}$ (0,5) $\dots (1)$

on pose $t = \frac{x}{2}$; lorsque $x \to +\infty$: $t \to +\infty$

$(1) \Rightarrow \lim_{t\to+\infty} 4\frac{\ln t}{t^2} = 0$ (0,5)

* $\lim_{x\to+\infty} x e^{-2x} = \lim_{x\to+\infty} (-\frac{1}{2})(-2)x e^{-2x}$ (0,5) $\dots (2)$

on pose $t = -2x$; lorsque $x \to +\infty$: $t \to +\infty$

$(2) \Rightarrow \lim_{t\to-\infty} -\frac{1}{2} t e^t = 0$ (0,5)

Exercice n°3 :

$f(x) = \frac{1}{x^2-4}$; $g(x) = x^3 + 3x^2 + 5$; $h(x) = \sqrt{-2x+4}$

1/ Domaine de définition :

* $D_f = \{x / x^2 - 4 \neq 0\} =]-\infty; -2[\cup]-2; 2[\cup]2; +\infty[$ (0,5)

$x^2 - 4 \neq 0 \Rightarrow (x-2)(x+2) \neq 0 \Rightarrow (x \neq -2) \vee (x \neq 2)$

* $D_g = \mathbb{R} =]-\infty; +\infty[$ (0,25)

* $D_h = \{x / -2x + 4 \geq 0\} =]-\infty; 2]$ (0,5)

$-2x + 4 \geq 0 \Rightarrow -2x \geq -4 \Rightarrow x \leq \frac{-4}{-2} \Rightarrow x \leq 2$

2/ * $D_f \cup D_h = \{x / x \in D_f$ ou $x \in D_h\} = \mathbb{R} =]-\infty; +\infty[$ (0,25)

* $C_{D_g}^{D_f} = \{x / x \in D_g$ et $x \notin D_f\} = D_g - D_f = \{-2, 2\}$ (0,5)

* $D_g / D_h = \{x / x \in D_g$ et $x \notin D_h\} = D_g - D_h =]2; +\infty[$ (0,25)

3/ Card $C_{D_g}^{D_f} = 2$ (0,5)

partition de $C_{D_g}^{D_f} = \{\{-2\}; \{2\}\}$ (0,5)

4/ Extremums de $g(x)$:

$g'(x) = 3x^2+6x = 0 \Rightarrow 3x^2+6x=0 \Rightarrow x(3x+6)=0$

$\Rightarrow (x=0) \vee (x = \frac{-6}{3} = -2)$ (0,5) (0,5)

$g(x)$ possède deux extremum : $M_1(0,5)$ et $M_2(-2,9)$

Leurs nature :

$g''(x) = 6x+6$ (0,25)

$g''(0) = 6(0)+6 = 6>0 \Rightarrow$ donc $M_1(0,0)$ est un minimum (0,25)

$g''(-2) = 6(-2)+6 = -12+6 = -6<0 \Rightarrow$ donc $M_2(-2,0)$ est un maximum (0,25) (0,25)

5/ points d'inflexion : $g''(x_0) = 0 \Rightarrow 6x+6=0 \Rightarrow x=-1$

point d'inflexion : $(-1,0)$ (0,5)

6/ La parité :

$f(-x) = \frac{1}{(-x)^2+4} = \frac{1}{x^2+4} = f(x)$ (0,25)

$f(x)$ est paire (0,25)

7/ La dérivabilité : (0,25)

$\lim\limits_{x\to 1} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{\frac{1}{x^2-4}+\frac{1}{3}}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{\frac{3+x^2-4}{3x^2-12}}{x-1}$

$= \lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2-1}{(3x^2-12)(x-1)} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{(3x^2-12)(x-1)}$

$= \lim\limits_{x\to 1} \frac{x+1}{3x^2-12} = \frac{1+1}{3-12} = \frac{-2}{9}$ (0,5)

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 1} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = l = \frac{-1}{9}$ donc f est dérivable en $x_0=1$ (0,25)

Déduire la continuité :

Comme f est dérivable donc elle est continue (0,5)

8/ Etude de la fonction $h(x)$:

$=]-\infty; 2]$

$\lim\limits_{x\to -\infty} h(x) = \lim \sqrt{-2x+4} = \sqrt{-2(-\infty)+4} = +\infty$ (0,25)

$\lim\limits_{x\to 2} h(x) = \lim\limits_{x\to 2} \sqrt{-2x+4} = \sqrt{-2(2)+4} = 0$ (0,25)

$h'(x) = [\sqrt{-2x+4}]' = \frac{-2}{2\sqrt{-2x+4}} = \frac{-1}{\underbrace{\sqrt{-2x+4}}_{>0}} < 0$ (0,5)

$h'(x)<0 \Rightarrow$ on déduit que $h(x)$ est décroissante (0,25)

Tableau de variation :

	$-\infty$	2
$f'(x)$	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	0

(0,5)

Intersection avec les axes :

axe (xx') : $y=0 \Rightarrow h(x)=0 \Rightarrow \sqrt{-2x+4}=0 \Rightarrow x=2$ (0,25)

donc $M(2,0)$

axe (yy') : $x=0 \Rightarrow h(0) = \sqrt{-2(0)+4} = \sqrt{4} = 2$ (0,25)

donc $M'(0,2)$

Représentation graphique :