Université MOULOUD MAMMERI Tizi Ouzou
Faculté Des Sciences.
Département de Mathématiques

Janvier 2025
Durée 1h30mn

Examen de Remplacement de Logique Mathématique.

EXERCICE 1 : *Montrer de deux manières (par contraposition et direct) l' assertion suivante, E étant un ensemble :*

$$\forall A, B \in \mathcal{P}(E),\ (A \cap B = A \cup B) \Rightarrow A = B.$$

EXERCICE 2 : *Soit la suite* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie par :* $x_0 = 4$ *et* $x_{n+1} = \frac{2x_n^2-3}{x_n+2}$.

Montrer que :

1) $\forall n \in \mathbb{N},\ x_n > 3$.
2) $\forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} - 3 > \frac{3}{2}(x_n - 3)$

EXERCICE 3 :

1) Donner la négation de la phrase mathématique suivante :
$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ \forall p \in \mathbb{N},\ n \geq N \text{ et } p \geq 0 \Rightarrow\ |u_{n+p} - u_n| < \epsilon$
2) Donner la contraposée de la phrase mathématique suivante :
$\forall \epsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ \forall p \in \mathbb{N},\ n \geq N \text{ et } p \geq 0\ \Rightarrow\ |u_{n+p} - u_n| < \epsilon$

EXERCICE 4: *Notons E l'ensemble des étudiants, S l'ensemble des jours de la semaine et pour un étudiant x, $h_j(x)$ son heure de réveil le jour j.*

a) Ecrire avec des symboles mathématiques la proposition « Tout étudiant se réveille au moins un jour de la semaine avant 8h »

b) Ecrire la négation de cette proposition avec des symboles mathématiques puis en français.

EXERCICE 5 : Trois étudiants, de 2ème année mathématique, font chacun une déclaration sur les cours qu'ils ont eu aujourd'hui :
1er étudiant: « Aujourd'hui nous avons eu : Analyse numérique, Logique et Analyse 3. »
2er étudiant:« Aujourd'hui nous avons eu: Analyse 3, mais pas Analyse numérique, ni Logique. »
3er étudiant: « Aujourd'hui nous avons eu : Analyse numérique, mais pas Analyse 3, ni Logique. »
Sachant que chaque étudiant a menti exactement deux fois, dans sa déclaration ; qu'est ce qu'ils ont eu réellement comme cours aujourd'hui ?

Corrigé Examen de remplacement.

Exo 1: 4pts

1°) 1ère méthode direct :

$\forall A,B \subset E$, $A\cap B = A\cup B$, montrons que $A=B$.

$\forall x \in A \Rightarrow x\in A\cup B \Rightarrow x\in A\cap B \Rightarrow x \in B$ d'où $A\subset B$.

2 $\forall x\in B \Rightarrow x\in A\cup B \Rightarrow x\in A\cap B \Rightarrow x\in A$ d'où $B\subset A$.

Alors $A=B$.

2ème méthode par contraposition tel que demander :

supposons $A\neq B$, montrons que $A\cap B \neq A\cup B$.

si $A\neq B \Rightarrow \exists\, x\in A\setminus B$ ou $x\in B\setminus A$

$\Rightarrow$ si $x\in A\setminus B \Rightarrow x\notin A\cap B$ et $x\in A\cup B$.

c.à.d $A\cap B\neq A\cup B$.

2 et

si $x\in B\setminus A$ même chôse $x\in A\cup B$

mais $x\notin A\cap B$

c.à.d $A\cup B\neq A\cap B$.

d'où $A\cap B = A\cup B \Rightarrow A=B$.

Exo 2: 4pts

$$\begin{cases} x_0 = 4 \\ x_{n+1} = \dfrac{2x_n^2-3}{x_n+2}. \end{cases}$$

1°/ Montrons par récurrence que : $\forall n\in\mathbb{N}$, $x_n>3$.

- pour $n=0$, $x_0=4>3$, c'est vraie.
- Supposons pour $n\geq 0$, $x_n>3$
- Montrons que $x_{n+1}>3$, en effet, on a :

2

$$x_{n+1}-3 = \frac{2x_n^2-3}{x_n+2} - 3 = \frac{2x_n^2-3x_n-9}{x_n+2}$$

Par hypothèse de récurrence, on a :

$x_n > 3 \Rightarrow x_n + 2 > 0$ et $2x_n^2 - 3x_n - 9 > 0$ (selon l'étude de l'équation $2x^2 - 3x - 9$ pour $x > 3$)

d'où $x_{n+1} - 3 > 0 \Rightarrow x_{n+1} > 3$.

Etude :

$f(x) = 2x^2 - 3x - 9 = 0$, $\Delta = (-3)^2 - 4(2)(-9)$
$= 9 + 72$
$= 81$

alors $x_1 = \frac{3-9}{4} = \frac{-\cancel{6}\,3}{\cancel{4}\,2}$, $x_2 = \frac{3+9}{4} = 3$

$\Rightarrow$

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		3	
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$

2°) Montrons que $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} - 3 > \frac{3}{2}(x_n - 3)$.

en effet, on a :

$$(x_{n+1} - 3) - \frac{3}{2}(x_n - 3) = \frac{2x_n^2 - 3}{x_n + 2} - \frac{3}{2}(x_n - 3) - 3$$

2

$$= \frac{2(2x_n^2 - 3) - 3(x_n^2 - x_n - 6) - 3 \times 2(x_n + 2)}{2(x_n + 2)}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{x_n^2 - 3x_n}{x_n + 2} = \frac{1}{2} \frac{x_n(x_n - 3)}{x_n + 2}$$

ce terme est positif, puisque $x_n > 3$.

Alors $x_{n+1} - 3 > \frac{3}{2}(x_n - 3)$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Exo3 : 4 pts

1°/ 2 pts $\exists \varepsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N}, \exists p \in \mathbb{N}, (n \geq N$ et $p \geq 0)$ et $|u_{n+p} - u_n| \geq \varepsilon$.

2°/ 2 pts $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N}, (|u_{n+p} - u_n| \geq \varepsilon) \Rightarrow (n < N$ ou $p < 0)$.

Exo4 : 4pts

2 a) $\forall x \in E, \exists j \in S, h_j(x) < 8^h$

2 b) $\exists x \in E, \forall j \in S, h_j(x) \geq 8^h$.

Il y'a un étudiant qui se lève à 8^h ou après 8^h tous les jours de la semaine (Donc c'est 1 grand fainéant)

4pts Exo5 : soient les variables N, T et L définies ainsi :

A : N : "Cours d'Analyse Numérique".

S : T : "Cours d'Analyse Trois".

L : L : "Cours de Logique".

Les déclarations des 3 étudiants peuvent être formalisées comme suit :

1^{er} étudiant : $N \wedge T \wedge L$

$2^{ème}$ étudiant : $T \wedge (\neg N) \wedge (\neg L)$.

$3^{ème}$ étudiant : $N \wedge (\neg T) \wedge (\neg L)$.

Chaque étudiant a menti exactement deux fois dans sa déclaration, par conséquent la vérité d'après la déclaration du 1^{er} étudiant est 1 élément de l'ensemble :

$\{(\neg N) \wedge (\neg L) \wedge T, (\neg N) \wedge L \wedge (\neg T), N \wedge (\neg L) \wedge (\neg T)\}$.

De même pour le second :

$\{(\neg T) \wedge N \wedge (\neg L), (\neg N) \wedge L \wedge (\neg T), N \wedge L \wedge T\}$

Pour le troisième : $\{(\neg N) \wedge (T) \wedge (\neg L), (\neg N) \wedge (\neg T) \wedge L$

La proposition commune est :

$(\neg N) \wedge L \wedge (\neg T)$ donc, ils ont eu Logique mais pas Analyse numérique ni Analyse <u>Trois</u>.