Université MOULOUD MAMMERI Tizi Ouzou
Faculté Des Sciences.
Département de Mathématiques

Janvier 2025
Durée 1h30mn

Examen de logique mathématique

Exo 1 : Montrer que :

1°) $\rceil P$ est une conséquence logique de $((P \Rightarrow Q) \wedge \rceil Q)$.

2°) $\rceil Q$ n'est pas une conséquence logique de $((P \Rightarrow Q) \wedge \rceil P)$.

Indication : H est une conséquence logique de J si " $J \Rightarrow H$ " est vraie.

Exo 2 : Pour tout entier naturel n non nul, calculer les produits suivants :

a) Le produit des entiers entre 1 et n.

b) Le produit des entiers pairs entre 1 et 2n.

c) Les produit des entiers impairs entre 1 et 2n+1.

d) $\prod_{k=1}^{k=n} \frac{k}{k+1}$.

Exo 3 : Ecrire en langage quantifié chacune des assertions suivantes, puis donner sa négation :

1°) Il n'existe pas d'entier naturel supérieur ou égal à tous les autres.

2°) Si la somme de deux entiers naturels est nulle alors ces deux entiers sont nuls.

3°) On peut trouver, à une distance aussi petite qu'on le veut de a, $(a \in \mathbb{R})$, un terme de la Suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de rang aussi grand qu'on le veut.

4°) $\mathcal{R}$ n'est pas une relation d'équivalence.

Exo 4 : Montrer que les assertions suivantes sont vraies :

a) $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^{k=n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

b) $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 3n.$ avec $(u_0 = 0,\ u_1 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ u_{n+1} = \frac{2}{n}\sum_{k=0}^{k=n} u_k)$.

Exo 5 : Chacune des trois personnes suivantes : Massinissa (M), Jugurta (J), Tacfarinas (T) exerce une des trois professions Enseignant, Ingénieur, Médecin.(La profession de chacun est différente des deux autres).

Sachant que les implications suivantes sont vraies :

a) « M est enseignant $\Rightarrow$ J est ingénieur ».

b) « M est ingénieur $\Rightarrow$ J est médecin ».

c) « J n'est pas enseignant $\Rightarrow$ T est ingénieur ».

Retrouver la profession de chacun ?

Corrigé de l'examen 2025.

Exo 1 :

4/4

5/5

1°/ $((P \Rightarrow Q) \wedge (\neg Q)) \overset{①}{\Rightarrow} \neg P$ est vraie ??

Par la table de vérité :

P	Q	$\neg P$	$\neg Q$	$P \Rightarrow Q$	$(P \Rightarrow Q) \wedge (\neg Q)$	①
1	1	0	0	1	0	1
1	0	0	1	0	0	1
0	1	1	0	1	0	1
0	0	1	1	1	1	1

2,5

① vraie, donc $\neg P$ est une conséquence logique de $(P \Rightarrow Q) \wedge (\neg Q)$.

2

2°/ $(P \Rightarrow Q) \wedge (\neg P) \overset{②}{\Longrightarrow} \neg Q$ n'est pas vraie ??

Par la table de vérité :

P	Q	$\neg P$	$\neg Q$	$P \Rightarrow Q$	$(P \Rightarrow Q) \wedge (\neg P)$	②
1	1	0	0	1	0	1
1	0	0	1	0	0	1
0	1	1	0	1	1	0
0	0	1	1	1	1	1

2,5

② pas vraie, donc $\neg Q$ n'est pas une conséquence logique de $(P \Rightarrow Q) \wedge (\neg P)$.

2

Exo 2 :

4/4

(a) $\prod_{k=1}^{k=n} k = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n = n!$ 1

(b) $\prod_{k=1}^{n} (2k) = (2) \cdot (4) \cdot (6) \cdot \ldots \cdot (2n) = 2^n \cdot n!$ 1

(c) $\prod_{k=0}^{n} (2k+1) = (1) \cdot (3) \cdot (5) \cdots (2n+1) = \dfrac{(1) \cdot (2) \cdot (3) \cdots (2n+1)}{(2) \cdot (4) \cdots (2n)}$

$= \dfrac{(2n+1)!}{2^n \cdot n!}$ 1

(d) $\prod_{k=1}^{n} \dfrac{k}{k+1} = \dfrac{1}{\cancel{2}} \times \dfrac{\cancel{2}}{\cancel{3}} \times \dfrac{\cancel{3}}{4} \times \cdots \times \dfrac{\cancel{n-1}}{\cancel{n}} \times \dfrac{\cancel{n}}{n+1} = \dfrac{1}{n+1}$ 1

Exo 3 : 0,5 1°/ $\forall n \in \mathbb{N}, \exists m \in \mathbb{N}, \; n \leq m.$

0,5 $\neg(1°) \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}, \forall m \in \mathbb{N}, \; n > m.$

0,5 2°/ $\forall n \in \mathbb{N}, \forall m \in \mathbb{N}$, si $n+m=0 \Rightarrow n=0$ et $m=0$

0,5 $\neg(2°)$ $\exists n \in \mathbb{N}, \exists m \in \mathbb{N}$, si $(n+m=0)$ et $(n \neq 0$ ou $m \neq 0)$

0,5 3°/ $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow |u_n - a| < \varepsilon$
$(a \in \mathbb{R})$.

0,5 $\neg(3°)$ $\exists \varepsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N}, (n \geq N)$ et $(|u_n - a| > \varepsilon)$

4°/ 1

Exo 4 : a/ $\forall n \in \mathbb{N}, \; \sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ ...... (1) 1,5

- pour $n=1$ On a : $\sum_{k=0}^{1} k^2 = 1^2 = 1 = \frac{1 \times 2 \times 3}{6} = \frac{6}{6}$

(1) est vraie

- Supposons que (1) est vraie à l'ordre n, $n \in \mathbb{N}$, montrons qu'elle reste vraie à l'ordre $n+1$. 0,5

c.à.d $\sum_{k=0}^{n+1} k^2 = \sum_{k=0}^{n} k^2 + (n+1)^2$

$$\underset{H.R}{=} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2.$$

$$= \frac{(n+1)[n.(2n+1) + 6(n+1)]}{6}$$

$$= \frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6}$$

$$= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

$$= \frac{(n+1)(n+2)(2(n+1)+1)}{6}$$

donc (1) est pour $(n+1)$.

1 D'où $\forall n \in \mathbb{N}, \; \sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+2)(2n+1)}{6}$.

(2)

b) On raisonne par récurrence forte.

- Pour $n=0$ On a : $u_0 = 0 = 3.0$ et pour $n=1$ $u_1 = 3.1 = 3$. 0,5

- Supposons la formule est vraie à tous les rangs k tel que $k \in [0, n]$, pour $n \in \mathbb{N}$ fixé. 0,5

On a alors :

$$u_{n+1} = \frac{2}{n+1} \sum_{k=0}^{n+1} u_k$$

$$\underset{(H-R)}{=} \frac{2}{n+1} \sum_{k=0}^{n+1} 3k$$

$$= \frac{6}{n+1} \sum_{k=0}^{n+1} k$$

$$\underset{\text{Som-arith}}{=} \frac{6}{n+1} \cdot \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

$$= 3.(n+2)$$ La formule est donc vraie au rang $n+1$.

D'après le principe de récurrence, On a :

$\forall n \in \mathbb{N}$, ~~$u_{n+1} = \frac{2}{n} \sum_{k=0}^{n} u_k$~~. 1 $u_n = 3.n$.

Exo5 :

a) M enseignant $\Rightarrow$ J ingénieur vraie

b) M ingénieur $\Rightarrow$ J médecin Vraie

c) J n'est pas enseignant $\Rightarrow$ T ingénieur vraie.

Alors si M est enseignant $\overset{a)}{\Rightarrow}$ J ingénieur $\overset{c)}{\Rightarrow}$ T ingénieur aussi impossible (J et T ingénieur), donc M n'est pas enseignant

si M est ingénieur $\overset{b)}{\Rightarrow}$ J médecin $\overset{c)}{\Rightarrow}$ T ingénieur aussi impossible donc M n'est pas ingénieur aussi.

Alors M est médecin. 1 1,5

3

Supposons que J est ingénieur $\overset{c)}{\Rightarrow}$ T est ingénieur
impossible donc J est enseignant ② 1,5
et donc aussi T est ingénieur ③ 1

Alors, On a : Massinissa (M) est médecin
Jugurtha (J) est enseignant.
Takfarinas (T) est ingénieur.