Chapitre1

L'analyse Combinatoire

Chapitre1

L’analyse Combinatoire

1. Introduction
2. Le principe de multiplication
3. Les arrangements avec et sans répétition
4. Les Permutations avec et sans répétition
5. Les combinaisons

Chapitre1

L'analyse Combinatoire

Chapitre1

L'analyse Combinatoire

Chapitre1

L'analyse Combinatoire

1. Introduction
2. Le principe de multiplication
3. Les arrangements avec et sans répétition
4. Les Permutations avec et sans répétition
5. Les combinaisons

Introduction

L'analyse combinatoire est une branche des mathématiques qui étudie les différentes façons de sélectionner, organiser et compter des objets ou des éléments dans des ensembles finis. Elle se concentre sur l'étude des arrangements, des permutations et des combinaisons, ainsi que sur d'autres concepts liés à la structure et à la manipulation des ensembles discrets.

Les domaines d'applications de cette discipline des mathématiques sont nombreux, parmi eux :

- **Probabilités et statistiques :**calculer des probabilités dans divers scénarios, tels que les lancers de dés, les tirages aléatoires.
- **Informatique et algorithmes :** L'analyse combinatoire est essentielle pour concevoir des algorithmes efficaces.
- **Cryptographie :** Dans le domaine de la sécurité de l'information, créer des algorithmes de cryptage et de décryptage robustes.
- **Théorie des graphes :**étudier les propriétés et les structures des graphes, notamment les cycles, les chemins, les arêtes,
- **Théorie des nombres :** la factorisation des nombres, la recherche de nombres premiers.

Principe de multiplication

Ce principe stipule que si une tâche peut être accomplie en m façons différentes et qu'une seconde tâche peut être accomplie indépendamment de la première en n façons différentes, alors les deux tâches peuvent être accomplies ensemble en $m \times n$ façons différentes.

Exemple

Supposons que trois équipes participent à un tournoi dans lequel sont déterminées une première, une deuxième et une troisième place. Pour faciliter l'identification des équipes, nous allons les désigner par les lettres A, B, C. Cherchons le nombre de manières différentes permettant d'attribuer le classement de ces 3 équipes.

- *La première place peut être occupée par les trois équipes A, B, C (3 façons différentes d'occuper cette place).*
- *Si la pemière place est déja prise, il reste que 2 possibilités pour occuper la deuxième place.*
- *Si les deux prémières place sont occupées, alors il ne reste qu'une seule possibilité pour occuper la dernière place.*

Par le principe de la multiplication, le nombre de facons possibles pour classer les équipes est :

Le nombre de façon pour la première place $\times$ *le nombre de façon pour la deuxième place* $\times$ *le nombre de façon pour la troisème place*$= 3 \times 2 \times 1 = 6$

Arrangement

Un arrangement est un ordre spécifique dans lequel les éléments d'un ensemble sont placés. Considérons un ensemble fini E contenant n éléments. Un arrangement de p éléments de l'ensemble E est une permutation ordonnée de p éléments de E.

Exemple

Posons

$$E = \{1, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$$

$$1256,\ 5621,\ 1245,\ 2145,\ 2221,\ 1212, \dots$$

Remarque

Il ne s'agit pas de dénombrer ces permutations, il s'agit de savoir leurs nombres, deux situations peuvent se présenter.

Arrangement avec répétition

L'arrangement avec répétition de p éléments d'un ensemble E contenant n éléments est donné par la formule :

$$A_n^p = n^p \tag{1}$$

Dans l'example précédent : $A_9^4 = 9^4 = 6561$ permutations

Exemple

Supposons qu'un voyageur planifie un voyage dans différentes villes pendant une semaine. Les villes à visiter sont Alger, Tizi Ouzou, et Boumerdes. Le voyageur peut visiter une même ville plusieurs fois au cours de la semaine et une seule ville en une seule journée. De combien de manières peut organiser sont voyage.

Solution

A titre d'exemple le voyageur peur organiser sont voyage comme suit :

Dimanche : visiter Alger
Lundi : visiter Tizi Ouzou
Mardi : rester à Tizi Ouzou
Mercredi : visiter Boumerdes
Jeudi : rester à boumerdes
Vendredi :revenir à tizi
Samedi : repartir vers alger

Il s'agit donc d'un arrangement avec répétition de 7 parmi 3

$$A_3^7 = 3^7 = 2187$$

Arrangements sans répétition

L'arrangement sans répétition de p éléments d'un ensemble E contenant n éléments est donné par la formule :

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!} \tag{2}$$

Exemple

Dans une course de 18 chevaux, le nombre de tiercés possibles dans l'ordre corréspondant au nombre d'arrangement sans répétition (un seul classement posible pour un cheval) de 3 parmis 18

$$A_{18}^3 = \frac{18!}{(15)!} = 4896$$

Remarque

Pour démontrer les résulalts (1, 2), il suffit d'appliquer le principe de la multiplication.

Permutation

En général, une permutation est un arrangement (l'ordre est important) sur tout les élément de l'ensemble.

Il existe deux types de permutations :

Permutation sans répétition

Une permutation est un arrangement sans répétition de tous les éléments d'un ensemble E. Si l'ensemble contient n éléments, le nombre total de permutations est $n!$. Cette permutation est noté par P_n.

Remarque

Pour démontrer que $P_n = n!$, il suffit de remplacer dans l'équation (2) p par n

Permutation avec répétition

Soit E un ensemble contenant n éléments avec k éléments de E qui figurent plus d'une seule fois dans l'ensemble. Alors si $n_1, \ldots, n_k$, le nombre de permutation avec répétitions les éléments de E est égale á

$$P_n = \frac{n!}{n_1! \times n_2! \times \ldots n_k!} \tag{3}$$

Exemple

Combien de façons différentes peut-on ranger les lettres du mot ''MATHEMATIQUES'' ?

Solution :

Le mot ''MATHEMATIQUES'' contient 11 *lettres, mais il y a des lettres qui se répétent.*

- *Il y a 2 ''M''.*
- *Il y a 2 ''A''.*
- *Il y a 2 ''T''.*
- *Il y a 2 ''E''.*

Nous appliquons la formule des permutations avec répétition, on obtient

$$P_1 1 = \frac{11!}{(2!)^4} = \frac{39916800}{16} = 2494800$$

mots.

Combinaisons

U

ne combinaison est un choix non ordonné d'un certain nombre d'éléments parmi un ensemble. Le nombre de combinaisons de p éléments parmi n est noté C_n^p ou $\binom{n}{p}$ est donné par la formule :

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!} \tag{4}$$

et s'interprête comme le nombre de suite de p éléments pris sans remise dans E.

Preuve

Si A_n^p est le nombre d'arrangement sans répétition de p élément parmi n, alors pour obtenir le nombre de combinaison il suffit de diviser ce nombre par $p!$.

Exemple

$$E = \{a, b, c, d\}$$

La liste de tout les arrangements sans répétitions possibles à 3 lettres est :

abc	*acb*	*bac*	*bca*	*cab*	*cba*
abd	*adb*	*bad*	*bda*	*dab*	*dba*
acd	*adc*	*cad*	*cda*	*dac*	*dca*
bcd	*bdc*	*cbd*	*cdb*	*dbc*	*dcb*

Chacune des 4 lignes de ce tableau correspond une seule combinaison parmi les élements de E. Ainsi le nombre de combinaisons est égale à 4, qui est aussi :

$$\binom{n}{p} = \frac{A_3^4}{3!} = \frac{24}{6}$$

Exemple

Une Urne contient 10 boules, 4 rouges (R) et 6 jaunes (J), on tire au hasard et sans remise 6 boules. De combien de façon :

1. *On obtient un nombre équilibrÃ© en terme de couleur.*
2. *Le nombre de couleur rouge et de 4.*
3. *Plus de couleur jaunes que de rouges*

Solution

Dans les 3 cas, l'ordre n'est pas important, il s'agit donc déterminer le nombre de combinaison.

1) Cette situation signifie que le tirage contient 3 boules rouges et 3 boules jaunes. Le problème se décompose comme suit :

• On calcul le nombre de situations dans la quelle on obtient 3 rouges, égale à :

$$\binom{4}{3} = 4$$

• On calcul le nombre de situations dans la quelle on obtient 3 jaunes, égale à :

$$\binom{6}{3} = 20$$

• On applique ensuite le principe de multiplication, c'estàdire

$$\binom{4}{3} \times \binom{6}{3} = 4 \times 20 = 80$$

2) Si le nombre de couleur rouge est 4, alors celui des couleur jaunes et 2. Au total donc :

$$\binom{4}{4} \times \binom{6}{4} = 1 \times 15 = 15$$

3) Il y a 3 situations qui corrrespond à ce cas : (0R, 6J), (1R,5J), (2R,4J). Au total

$$\binom{4}{0} \times \binom{6}{6} + \binom{4}{1} \times \binom{6}{5} + \binom{4}{2} \times \binom{6}{4} = 1 \times 1 + 4 \times 6 + 6 \times 15 = 1 + 24 + 90 = 115$$

Chapitre 2

Calcul des Probabilité

1. Espace fondamental
2. Tribu
3. Notion de Proabbilité (dÃ©finition, propriètés et résultats important)
4. Notion de Probabilités Conditionnelle (Système complet d'événements, formules de Bayes)

Chapitre 2

Calcul des Probabilité

1. Espace fondamental
2. Tribu
3. Notion de Proabbilité (dÃ©finition, propriètés et résultats important)
4. Notion de Probabilités Conditionnelle (Système complet d'événements, formules de Bayes)

Chapitre 2

Calcul des Probabilité

1. Espace fondamental
2. Tribu
3. Notion de Proabbilité (dÃ©finition, propriètés et résultats important)
4. Notion de Probabilités Conditionnelle (Système complet d'événements, formules de Bayes)

Chapitre 2

Calcul des Probabilité

1. Espace fondamental
2. Tribu
3. Notion de Proabbilité (dÃ©finition, propriètés et résultats important)
4. Notion de Probabilités Conditionnelle (Système complet d'événements, formules de Bayes)

Chapitre 2

Calcul des Probabilité

1. Espace fondamental
2. Tribu
3. Notion de Proabbilité (dÃ©finition, propriètés et résultats important)
4. Notion de Probabilités Conditionnelle (Système complet d'événements, formules de Bayes)

Espace fondamental

Définition

- *Expérience aléatoire = expérience avec résultat exact imprédictible*
- *Evénement élémentaire* $\{\omega_i\}$ *= résultat possible* ω_i *pris comme singleton*
- *Ensemble fondamental (ou univers)* Ω *= union de tous les événements élémentaires, d'où* $\quad \Omega = \bigcup_{i \in I} \{\omega_i\}$

Exemples :

1. Lancer de deux dés : $\begin{cases} \omega_1 = (3,5) \text{ ou } \omega_2 = (1,1) \text{ résultat possible} \\ \{(2,6)\} \text{ est un événement élémentaire} \\ \Omega = \{(1,1),(1,2),\ldots,(6,6)\} = \{1,2,\ldots,6\}^2 \end{cases}$
2. Pluie (en h) un 5/01 à Paris : $\begin{cases} \omega_1 = 1.23 \text{ ou } \omega_2 = 0 \text{ résultat possible} \\ \{3.7325\} \text{ événement élémentaire} \\ \Omega = [0,24] \end{cases}$
3. touche `RAND` d'une calculatrice ou ordinateur ...

Tribu

Définition

Ω un ensemble fondamental. On appelle **tribu** *$\mathcal{A}$ associée à Ω un ensemble de sous-ensembles de Ω tel que :*

1. $\emptyset \in \mathcal{A}$;
2. *Si $A \in \mathcal{A}$ alors $\Omega \setminus A = \overline{A} \in \mathcal{A}$;*
3. *Si $(A_i)_{i \in I}$ où $I \subset \mathbb{N}$, famille d'ensembles de $\mathcal{A}$, alors $\bigcap_{i \in I} A_i \in \mathcal{A}$.*

Un ensemble $\in \mathcal{A}$ est appelé un **événement** *$\Longrightarrow \mathcal{A}$ ensemble des événements de l'expérience (dont l'événement impossible $\emptyset$).*

Propriété

On peut remplacer $\cap$ par $\cup$ dans 3. grâce à la propriété : $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ (qui s'étend à des intersections et unions dénombrables).

Tribu (2)

Premier exemple :

On lance 2 fois une pièce :

$\Longrightarrow$ Un résultat $\omega = (P, P)$

$\Longrightarrow \Omega = \big\{(P, P), (P, F), (F, P), (F, F)\big\}$

$\Longrightarrow$ Exemple d'événement : A_1 ="Au moins 1 P"$= \{(P, F), (F, P), (P, P)\}$

$\Longrightarrow$ Tribu contient tous les événements possibles + $\emptyset$. D'où

$$\mathcal{A} = \mathcal{P}\big(\Omega\big) : \text{ ensemble de toutes les parties de } \Omega$$

$\mathcal{A} = \{\emptyset, \{(P, P)\}, \{(P, F)\}, \{(F, F)\}, \{(F, P)\}, \{(P, P), (P, F)\}, \{(P, P), (F, F)\}, \{(P, P), (F, P)\}, \{(P, F), (F, P)\}, \{(P, F)$
$\{(F, P), (F, F)\}, \{(P, P), (F, P), (P, F)\}, \{(P, P), (F, P), (F, F)\}, \{(P, P), (F, F), (P, F)\}, \{(P, F), (F, P), (F, F)\}, \Omega\}$

Tribu (3)

Exemples généraux :

1. Si $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$ famille finie d'événements élémentaires, $\mathcal{P}(\Omega)$ est très souvent la tribu considérée sur Ω :

$$\mathcal{P}(\Omega) = \left\{\emptyset, \{\omega_1\}, \ldots, \{\omega_n\}, \{\omega_1, \omega_2\}, \{\omega_1, \omega_3\}, \ldots, \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}, \ldots, \Omega\right\}$$

2. La tribu triviale $\mathcal{A}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$: plus petite tribu possible sur Ω.

Exemples précédents :

1. Pour $\Omega = \{1, \ldots, 6\}^2$, on prendra

$$\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega) = \left\{\emptyset, \{(1,1)\}, \ldots, \{(1,1), (1,2)\}, \ldots, \Omega\right\}$$

2. Pour $\Omega = [0, 24]$, on peut prendre aussi $\mathcal{P}\big([0, 24]\big)$. Mais on préférera une tribu plus "petite" (incluse) notée $\mathcal{B}\big([0, 24]\big)$ et qui contient tous les ensembles formés avec des intervalles de $[0, 24]$

Tribu (4)

Remarque : Pour $\Omega =$ un intervalle ou $\cup$ d'intervalles de $\mathbb{R}$, on choisira toujours $\mathcal{B}(\Omega)$ contenant toutes les $\cap$ ou $\cup$ d'intervalles inclus dans Ω.

Propriété

Si $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$, *alors* $Card(\mathcal{P}(\Omega)) = 2^n$.

Démonstration.

$\mathcal{P}(\Omega)$ contient tous les sous-ensembles de Ω. Chaque sous-ensemble contient ou ne contient pas ω_1, contient ou ne contient pas ω_2,... Donc à chaque élément de Ω on peut associer 1 ou 0 suivant que cet élement est présent ou non dans le sous-ensemble. Ainsi $\mathrm{Card}(\mathcal{P}(\Omega)) = \mathrm{Card}(\{0,1\}^n)$, nombre de n-uplets d'éléments de $\{0,1\}$. Or $\mathrm{Card}(\{0,1\}^n) = \mathrm{Card}^n(\{0,1\}) = 2^n$. □

Exercice : Soit Ω contenant au moins 2 éléments et $A \subset \Omega$, avec $A \neq \emptyset$ et $A \neq \Omega$. Montrer que $\mathcal{A} = \{\emptyset, \Omega, A, \overline{A}\}$ est une tribu sur Ω.

Démonstration.

On vérifie facilement les 3 points de la définition d'une tribu. □

Tribu (5)

Définition

Pour A et B deux événements de $\mathcal{A}$ une tribu sur Ω alors :

- *On appelle $\overline{A}$ l'événement contraire de A.*
- *On appelle l'événement "A et B" l'ensemble $A \cap B$ qui appartient à $\mathcal{A}$.*
- *On appelle l'événement "A ou B" l'ensemble $A \cup B$ qui appartient à $\mathcal{A}$.*
- *On dit que A et B sont incompatibles lorsque $A \cap B = \emptyset$.*

Exemple :

1. Pour $\Omega = \{1, \ldots, 6\}^2$, considérons $\begin{cases} A = \text{"Les 2 dés sont égaux"} \\ B = \text{"Un des dés marque 4"} \end{cases}$
$\Longrightarrow A = \{(1,1), \ldots, (6,6)\}$ et $B = \{(4,1), \ldots, (4,6), (1,4), \ldots, (6,4)\}$
$\Longrightarrow$ "A et B"$= \{(4,4)\}$ et Card("A ou B") $= 16$
2. Pour $\Omega = [0, 24]$, on considère $A =$"Il a plu moins d'1h" et $B =$"Il a plu entre 13 et 22h" $\Longrightarrow$ A et B incompatibles

Plan du cours

1. Quelques rappels de statistiques descriptives unidimensionnelles
   - Statistique unidimensionnelle
   - Statistique bidimensionnelle
2. Espace de probabilité, mesure de probabilité et probabilité conditionnelle
   - Espace de probabilité
   - Mesure de probabilité d'un événement
   - Cas particulier de l'équiprobabilité
   - Probabilité conditionnelle et indépendance
3. Variables aléatoires
   - Définitions et propriétés générales
   - Moments d'une variable aléatoire
   - Lois à connaître
   - Fonction d'une autre variable aléatoire
4. Suites de v.a.i.i.d., théorèmes limite et introduction à l'estimation
   - Variables aléatoires indépendantes (v.a.i.)
   - Théorèmes limite
   - Estimation paramétrique et un intervalle de confiance

Probabilité

Définition

Une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$ *est une application* $\mathbb{P} : \mathcal{A} \to [0,1]$*, qui à un événement* $E \in \mathcal{A}$ *associe le réel* $\mathbb{P}(E) \in [0,1]$ *et telle que :*

- $\mathbb{P}(\Omega) = 1$.
- *Si* $(E_j)_{j \in J \subset \mathbb{N}}$ *événements incompatibles de* $\mathcal{A}$, $\mathbb{P}\Big(\bigcup_{j \in J} E_j\Big) = \sum_{j \in J} \mathbb{P}(E_j)$

Exemples génériques : 1. Pour $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ et $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$, probabilité uniforme définie par $\mathbb{P}(A) = \mathrm{Card}(A)/n$ pour tout $A \in \mathcal{A}$.

2. Pour $\Omega = \mathbb{N}^*$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$, $\mathbb{P}(A) = \sum_{k \in A} p_k$ pour tout $A \in \mathcal{A}$ et $\sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1$ définit une probabilité.

3. Pour $\Omega = [0,1]$, $\mathcal{A} = \mathcal{B}([0,1])$, on peut associer la probabilité uniforme définie par $\mathbb{P}([a', b']) = b' - a'$ pour tout $0 \le a' < b' \le 1$.

Probabilité (2)

Exemples concrets :

1. Lancer de 2 pièces équilibrées : $\mathcal{A} = \mathcal{P}\big(\{(P,P),(P,F),(F,P),(F,F)\}\big)$
$\Longrightarrow \mathbb{P}(A) = \text{Card}(A)/4$. Exemple $\mathbb{P}(\text{"Au moins 1 P"'}) = 3/4$

2. Au P/F, nombre d'essais avant P : $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\mathbb{N}^*)$, $\mathbb{P}\big(\{k\}\big) = 2^{-k}$
$\Longrightarrow \mathbb{P}(\text{"Nombre d'essais} \geq 4\text{"}) = 1 - \mathbb{P}(\text{"Nombre d'essais} \leq 3\text{"})$
$= 1 - \mathbb{P}\big(\{1\}\big) - \mathbb{P}\big(\{2\}\big) - \mathbb{P}\big(\{3\}\big) = 1 - 1/2 - 1/4 - 1/8 = 1/8$

3. Choisir un réel "au hasard" entre 0 et 1 : Pour $\Omega = [0,1]$, $\mathcal{A} = \mathcal{B}([0,1])$
$\Longrightarrow \mathbb{P}(\text{"}Nombre = 5\text{"}) = 0$ et $\mathbb{P}(\text{"}\ln 2 < Nombre < 0.7\text{"}) = 0.7 - \ln 2$

Quelques définitions et propriétés

Définition

Pour Ω *un ensemble fondamental,* $\mathcal{A}$ *une tribu sur* Ω*,*

- $(\Omega, \mathcal{A})$ *est un espace probabilisable ;*
- *Si* $\mathbb{P}$ *probabilité sur* $(\Omega, \mathcal{A})$*,* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ *est un espace de probabilité.*

Propriété

Si $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ *est un espace de probabilité,*

- $\mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$ *pour* $A \in \mathcal{A}$*.*
- $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$*.*
- *Si* $A, B \in \mathcal{A}$*,* $A \subset B$*,* $0 \leq \mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B) \leq 1$*.*
- $\mathbb{P}(A \cup B) + \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$*, pour* $A, B \in \mathcal{A}$*.*
- *Pour* $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ *une suite d'événements de* $\mathcal{A}$*, telle que* $A_i \subset A_{i+1}$ *pour tout* $i \in \mathbb{N}$*, alors* $\mathbb{P}\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i\right) = \lim_{n \to \infty} \mathbb{P}(A_n)$*.*

Quelques définitions et propriétés (2)

Démonstration.

- A et $\overline{A}$ sont incompatibles ($A \cap \overline{A} = \emptyset$) et $A \cup \overline{A} = \Omega$, donc $\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(\overline{A}) = \mathbb{P}(\Omega) = 1$
- On prend $A = \emptyset$ et la propriété précédente
- On a $B = A \cup \left(B \cap \overline{A}\right)$ et comme A et $B \cap \overline{A}$ incompatibles, $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B \cap \overline{A})$, d'où $\mathbb{P}(B) \geq \mathbb{P}(A)$ car $\mathbb{P}(B \cap \overline{A}) \geq 0$
- Considérons les ensembles $A \cap \overline{B} = A \setminus A \cap B$ et $B \cap \overline{A} = B \setminus A \cap B$. Alors $A \cap B$, $A \cap \overline{B}$ et $B \cap \overline{A}$ sont trois événements incompatibles et $\left(A \cap B\right) \cup \left(A \cap \overline{B}\right) \cup \left(B \cap \overline{A}\right) = A \cup B$. D'où

  $$\mathbb{P}\left(A \cap B\right) + \mathbb{P}\left(A \cap \overline{B}\right) + \mathbb{P}\left(B \cap \overline{A}\right) = \mathbb{P}\left(A \cup B\right). \tag{1}$$

  Mais $\left(A \cap \overline{B}\right)$ et $\left(A \cap B\right)$ sont incompatibles et $\left(A \cap \overline{B}\right) \cup \left(A \cap B\right) = A$. D'où $\mathbb{P}\left(A \cap \overline{B}\right) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}\left(A \cap B\right)$. De même, $\mathbb{P}\left(B \cap \overline{A}\right) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}\left(A \cap B\right)$. En reportant dans (1), on obtient : $\mathbb{P}\left(A \cap B\right) + \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}\left(A \cap B\right) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}\left(A \cap B\right) = \mathbb{P}\left(A \cup B\right)$, d'où $\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}\left(A \cup B\right) + \mathbb{P}\left(A \cap B\right)$.
- Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\bigcup_{i=0}^{n} A_i = A_n$ car $A_i \subset A_n$ pour $i \leq n$. Donc $\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \mathbb{P}(A_n)$. Or la suite $\left(\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)\right)_n$ est une suite croissante majorée par 1. Elle est donc convergente. Donc $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n)$. Mais $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i = A_0 \bigcup \left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} \left(A_{i+1} \setminus A_i\right)\right.$ tous ces événements étant incompatibles. Donc $\mathbb{P}\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i\right) = \mathbb{P}(A_0) + \sum_{i=0}^{\infty} \mathbb{P}\left(A_{i+1} \setminus A_i\right) = \mathbb{P}(A_0) + \sum_{i=0}^{\infty} \mathbb{P}(A_{i+1}) - P(A_i)$. Ceci est une série télescopique qui vaut exactement $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n)$, puisque cette limite existe.

Quelques définitions et propriétés (3)

Définition

Soit Ω un ensemble et $J \subset \mathbb{N}$. On dit que $(E_i)_{i \in J}$ famille de $\mathcal{A}$ forme une **partition** *de Ω dans $\mathcal{A}$ si :*

- *Les E_i sont incompatibles deux à deux soit $E_i \cap E_j = \emptyset$ pour $i \neq j$.*
- *L'ensemble des E_i couvre Ω soit $\bigcup_{i \in J} E_i = \Omega$.*

Exemple : Si $A \in \mathcal{A}$, alors A et $\overline{A}$ partition de Ω dans $\mathcal{A}$.

Proposition

(Formule des probabilités totales) *Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ espace de probabilité et $(E_j)_{j \in J}$ partition de Ω dans $\mathcal{A}$. Alors, pour tout $A \in \mathcal{A}$,*

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{j \in J} \mathbb{P}(A \cap E_j).$$

Quelques définitions et propriétés (4)

Démonstration.

Comme $A \cap E_i \subset E_i$ et $A \cap E_j \subset E_j$ et $E_i \cap E_j = \emptyset$ pour $i \neq j$, alors on a $(A \cap E_i) \cap (A \cap E_j) = \emptyset$ pour $i \neq j$. Ainsi $\mathbb{P}\Big(\bigcup_{j \in J} (A \cap E_j)\Big) = \sum_{j \in J} \mathbb{P}(A \cap E_j)$. De plus, par distributivité de l'intersection et l'union d'ensembles (à l'égal de celle dans $\mathbb{R}$, l'union jouant le rôle de $+$ et l'intersection de $\times$), on a :

$$\bigcup_{j \in J} (A \cap E_j) = A \bigcap \Big(\bigcup_{j \in J} E_j\Big) \qquad \text{(comme une factorisation !).}$$

Comme $\bigcup_{j \in J} E_j = \Omega$ (partition !), alors $\bigcup_{j \in J} (A \cap E_j) = A \cap \Omega = A$. Par conséquent, on a bien $\mathbb{P}(A) = \sum_{j \in J} \mathbb{P}(A \cap E_j)$. □

Exemples d'utilisation :

- On lance n fois une pièce équilibrée. $\mathbb{P}\big(\text{"Nombre de } P = k\text{"}\big)$?
  $\Omega = \{P, F\}^n$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ et probabilité uniforme. Il y a $\mathrm{Card}(\Omega) = 2^n$ tirages possibles, d'où $\Omega = \{\omega_i\}_{1 \leq i \leq 2^n}$. Mais $(\{\omega_i\})_{1 \leq i \leq 2^n}$ partition de Ω dans $\mathcal{A}$. Donc $\mathbb{P}(A) = \sum_{\omega_i \in A} 2^{-n} = \mathrm{Card}(A)/2^n = C_n^k/2^n$

Quelques définitions et propriétés (5)

Exemples d'utilisation :

- On lance un dé équilibré, puis on lance le nombre du dé fois une pièce équilibrée. On note le nombre de *Piles*
  $\Longrightarrow$ Calcul de $\mathbb{P}(A)$ avec $A =$ "4*Piles*" ?
  On note D_i l'événement : "le dé a montré i", pour $i = 1, \ldots, 6$.
  Alors $(D_i)_{1 \leq i \leq 6}$ partition $\Longrightarrow \mathbb{P}(A) = \displaystyle\sum_{i=1}^{6} \mathbb{P}(A \cap D_i) = \sum_{i=4}^{6} \mathbb{P}(A \cap D_i)$
  Exercice précédent : on déduit que $\mathbb{P}(A \cap D_i) = \dfrac{1}{6}\, C_i^4\, 2^{-i}$.
  D'où $\mathbb{P}(A) = \frac{1}{6}\,(2^{-4} + 5 \cdot 2^{-5} + 15 \cdot 2^{-6}) = \frac{1}{6}\,(4 + 10 + 15)\,2^{-6} \simeq 0.076$.

Remarque : Exercice plus clair avec la notion d'indépendance !

Plan du cours

Equiprobabilité

Définition

Soit Ω *un ensemble fini et la tribu* $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ *associée. On dit que* $\mathbb{P}$ *est la mesure uniforme sur* $(\Omega, \mathcal{A})$ *si* $\forall \omega,\ \omega' \in \Omega,\ \mathbb{P}(\{\omega\}) = \mathbb{P}(\{\omega'\})$ *: Equiprobabilité.*

Propriété

Si Ω *fini,* $\mathbb{P}$ *probabilité uniforme sur* $(\Omega, \mathcal{A})$*, alors* $\forall A \in \mathcal{A},\ \mathbb{P}(A) = \dfrac{card(A)}{card(\Omega)}$.

Cas particulier : Pour tout $\omega \in \Omega$, $\mathbb{P}(\{\omega\}) = 1/\text{card}(\Omega)$.

Exemple : Dé équilibré avec $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Equiprobabilité (2)

Remarque : Si équiprobabilité, alors :

$$(\text{Calculer une probabilité}) \iff (\text{Calculer le cardinal d'un ensemble})$$

$\Longrightarrow$ Résultats combinatoires : on tire k éléments dans un ensemble de n

- S'il y a remise, et que l'ordre compte, un tirage est un **k-uplet**, et le nombre total de k-uplets est : n^k.
- S'il n'y a pas remise, et que l'ordre compte, un tirage est un **arrangement**, et le nombre total d'arrangements est :
$$A_n^k = n(n-1) \times \cdots \times (n-k+1) = n!/(n-k)!$$
- S'il n'y a pas remise, et que l'ordre ne compte pas, un tirage est une **combinaison**, et le nombre total de combinaisons est :
$$C_n^k = A_n^k/k! = n!/(k!(n-k)!)$$

Plan du cours

1. Quelques rappels de statistiques descriptives unidimensionnelles
   - Statistique unidimensionnelle
   - Statistique bidimensionnelle
2. Espace de probabilité, mesure de probabilité et probabilité conditionnelle
   - Espace de probabilité
   - Mesure de probabilité d'un événement
   - Cas particulier de l'équiprobabilité
   - Probabilité conditionnelle et indépendance
3. Variables aléatoires
   - Définitions et propriétés générales
   - Moments d'une variable aléatoire
   - Lois à connaître
   - Fonction d'une autre variable aléatoire
4. Suites de v.a.i.i.d., théorèmes limite et introduction à l'estimation
   - Variables aléatoires indépendantes (v.a.i.)
   - Théorèmes limite
   - Estimation paramètrique et un intervalle de confiance

Probabilité conditionnelle

Définition

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ *un espace de probabilité. Si* A, $B \in \mathcal{A}$ *et* $\mathbb{P}(A) \neq 0$, *la* **probabilité conditionnelle** *de* B *sachant* A *est* $\mathbb{P}(B \mid A) = \dfrac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)}$

Remarque : Calculer des probabilités sachant $A \Longrightarrow$ travailler avec A nouvel espace fondamental, une tribu associée et une nouvelle probabilité

Exemple : Pile ou face 2 fois avec pièce équilibrée. Calculer la probabilité d'avoir (P, P) sachant qu'on a obtenu au moins un P ?

$\Omega = \big\{(P,P),(P,F),(F,P),(F,F)\big\}$ et $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$, $\mathbb{P}$ uniforme
$\Longrightarrow A =$"Au moins 1 P"$= \{(P,F),(F,P),(P,P)\}$ et $B = \{(P,P)\}$
$\Longrightarrow \mathbb{P}(B \mid A) = \dfrac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)} = \dfrac{\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A)} = \dfrac{1}{3}$

Indépendance

Définition

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ *un espace de probabilité.* A, $B \in \mathcal{A}$, *avec* $\mathbb{P}(A) \neq 0$ *sont* **indépendants** *si* $\mathbb{P}(B \mid A) = \mathbb{P}(B)$.

Conséquence : Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité, A, $B \in \mathcal{A}$) :

$$\left(\ A \text{ et } B \text{ indépendants}\right) \Longleftrightarrow \left(\ \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\ \right)$$

Remarque : Ne pas confondre indépendance et incompatibilité !

Exemple : P/F 2 fois pièce équilibrée $A = \{(P, F), (F, F)\}$,
$B = \{(F, P), (F, F)\}$

$\Longrightarrow \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(\{(F, F)\}) = \frac{1}{4} = \mathbb{P}(A)\ \mathbb{P}(B)$: A et B indépendants mais pas incompatibles !

Indépendance (2)

Définition

$(A_i)_{i\in I}$ famille d'événements de $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. $(A_i)_{i\in I}$ est une famille d'événements (mutuellement) indépendants si et seulement si pour tout $k \in \mathbb{N}$, pour tout $j_1, \cdots, j_k \in I^k$ distincts,
$\mathbb{P}\left(A_{j_1} \cap \cdots \cap A_{j_k}\right) = \mathbb{P}(A_{j_1}) \times \cdots \times \mathbb{P}(A_{j_k})$.

Remarque : Etre mutuellement indépendant est plus contraignant que d'être indépendant deux à deux !

Exemple : P/F 2 fois pièce équilibrée $\left\{\begin{array}{l} A \text{ : premier lancer P} \\ B \text{ : second lancer P} \\ C \text{ : deux lancers identiques} \end{array}\right.$.

On a A et B indépendants, A et C également, de même que B et C, et pourtant A, B et C ne sont pas mutuellement indépendants... car
$\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(\{(P,P)\}) = \frac{1}{4} \neq \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B)\,\mathbb{P}(C) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$

Formule de Bayes

Proposition

(Formule de Bayes) *Soit* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ *espace de probabilité et* $(E_j)_{j \in J}$ *famille d'événements de* $\mathcal{A}$ *et partition de* $(\Omega, \mathcal{A})$*. Pour tout* $A \in \mathcal{A}$*, si on connaît* $\mathbb{P}(E_j)$ *et* $\mathbb{P}(A \mid E_j)$ *pour tout* $j \in J$*, alors*

$$\mathbb{P}(E_k \mid A) = \frac{\mathbb{P}(A \mid E_k)\,\mathbb{P}(E_k)}{\sum_{j \in J} \mathbb{P}(A \mid E_j)\,\mathbb{P}(E_j)} \quad \textit{pour } k \in J$$

Démonstration.

On a $\mathbb{P}(E_k \mid A) = \frac{\mathbb{P}(E_k \cap A)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(A \mid E_k)\,\mathbb{P}(E_k)}{\mathbb{P}(A)}$. Mais $\mathbb{P}(A) = \sum_{j \in J} \mathbb{P}(E_j \cap A)$ par la formule des probabilités totale, d'où $\mathbb{P}(A) = \sum_{j \in J} \mathbb{P}(A \mid E_j)\,\mathbb{P}(E_j)$. D'où le résultat. $\square$

Formule de Bayes (2)

Exemple : Equipe de foot qui joue autant à domicile qu'à l'extérieur, gagne 1 fois sur 2 à domicile, 1 fois sur 3 à l'extérieur, fait nul 1 fois sur 4 à domicile, 1 fois sur 3 à l'extérieur. Déterminer la probabilité qu'elle gagne, puis la probabilité d'être à domicile sachant qu'elle a perdu.

Démonstration.

On note les événements :

- "M" : jouer à domicile (maison), "E" : jouer à l'extérieur
- "V" : victoire, "N" : nul, "D" : défaite

Alors : $\mathbb{P}(M) = \mathbb{P}(E) = 1/2$, $\mathbb{P}(V \mid M) = 1/2$, $\mathbb{P}(N \mid M) = 1/4$, $\mathbb{P}(V \mid E) = 1/3$ et $\mathbb{P}(N \mid E) = 1/3$. D'où $\mathbb{P}(D \mid M) = 1/4$ et $\mathbb{P}(D \mid E) = 1/3$.

• $\mathbb{P}(V) = \mathbb{P}(V \cap M) + \mathbb{P}(V \cap E) = \mathbb{P}(V \mid M)\,\mathbb{P}(M) + \mathbb{P}(V \mid E)\,\mathbb{P}(E) = (1/2 + 1/3)/2 = 5/12.$

• $\mathbb{P}(M \mid D) = \dfrac{\mathbb{P}(M \cap D)}{\mathbb{P}(D)} = \dfrac{\mathbb{P}(D \mid M)\,\mathbb{P}(M)}{\mathbb{P}(D \mid M)\mathbb{P}(M) + \mathbb{P}(D \mid E)\mathbb{P}(E)} = \dfrac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{4} + \frac{1}{3}} = \dfrac{3}{7}$ □