Chapitre1

L'analyse Combinatoire

Chapitre1

L'analyse Combinatoire

Chapitre1

L'analyse Combinatoire

1. Introduction
2. Le principe de multiplication
3. Les arrangements avec et sans répétition
4. Les Permutations avec et sans répétition
5. Les combinaisons

Chapitre1

L'analyse Combinatoire

Chapitre1

L'analyse Combinatoire

Introduction

L'analyse combinatoire est une branche des mathématiques qui étudie les différentes façons de sélectionner, organiser et compter des objets ou des éléments dans des ensembles finis. Elle se concentre sur l'étude des arrangements, des permutations et des combinaisons, ainsi que sur d'autres concepts liés à la structure et à la manipulation des ensembles discrets.

Les domaines d'applications de cette discipline des mathématiques sont nombreux, parmi eux :

- **Probabilités et statistiques :**calculer des probabilités dans divers scénarios, tels que les lancers de dés, les tirages aléatoires.
- **Informatique et algorithmes :** L'analyse combinatoire est essentielle pour concevoir des algorithmes efficaces.
- **Cryptographie :** Dans le domaine de la sécurité de l'information, créer des algorithmes de cryptage et de décryptage robustes.
- **Théorie des graphes :**étudier les propriétés et les structures des graphes, notamment les cycles, les chemins, les arêtes,
- **Théorie des nombres :** la factorisation des nombres, la recherche de nombres premiers.

Principe de multiplication

Ce principe stipule que si une tâche peut être accomplie en m façons différentes et qu'une seconde tâche peut être accomplie indépendamment de la première en n façons différentes, alors les deux tâches peuvent être accomplies ensemble en $m \times n$ façons différentes.

Exemple

Supposons que trois équipes participent à un tournoi dans lequel sont déterminées une première, une deuxième et une troisième place. Pour faciliter l'identification des équipes, nous allons les désigner par les lettres A, B, C. Cherchons le nombre de manières différentes permettant d'attribuer le classement de ces 3 équipes.

- *La première place peut être occupée par les trois équipes A, B, C (3 façons différentes d'occuper cette place).*
- *Si la pemière place est déja prise, il reste que 2 possibilités pour occuper la deuxième place.*
- *Si les deux prémières place sont occupées, alors il ne reste qu'une seule possibilité pour occuper la dernière place.*

Par le principe de la multiplication, le nombre de facons possibles pour classer les équipes est :

$$\textit{Le nombre de façon pour la première place} \times \textit{le nombre de façon pour la deuxième place} \times \textit{le nombre de façon pour la troisème place} = 3 \times 2 \times 1 = 6$$

Arrangement

Un arrangement est un ordre spécifique dans lequel les éléments d'un ensemble sont placés. Considérons un ensemble fini E contenant n éléments. Un arrangement de p éléments de l'ensemble E est une permutation ordonnée de p éléments de E.

Exemple

Posons

$$E = \{1, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$$

$$1256,\ 5621,\ 1245,\ 2145,\ 2221,\ 1212, \dots$$

Remarque

Il ne s'agit pas de dénombrer ces permutations, il s'agit de savoir leurs nombres, deux situations peuvent se présenter.

Arrangement avec répétition

L'arrangement avec répétition de p éléments d'un ensemble E contenant n éléments est donné par la formule :

$$A_n^p = n^p \tag{1}$$

Dans l'example précédent : $A_9^4 = 9^4 = 6561$ permutations

Exemple

Supposons qu'un voyageur planifie un voyage dans différentes villes pendant une semaine. Les villes à visiter sont Alger, Tizi Ouzou, et Boumerdes. Le voyageur peut visiter une même ville plusieurs fois au cours de la semaine et une seule ville en une seule journée. De combien de manières peut organiser sont voyage.

Solution

A titre d'exemple le voyageur peur organiser sont voyage comme suit :

Dimanche : visiter Alger
Lundi : visiter Tizi Ouzou
Mardi : rester à Tizi Ouzou
Mercredi : visiter Boumerdes
Jeudi : rester à boumerdes
Vendredi :revenir à tizi
Samedi : repartir vers alger

Il s'agit donc d'un arrangement avec répétition de 7 parmi 3

$$A_3^7 = 3^7 = 2187$$

Arrangements sans répétition

L'arrangement sans répétition de p éléments d'un ensemble E contenant n éléments est donné par la formule :

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!} \tag{2}$$

Exemple

Dans une course de 18 chevaux, le nombre de tiercés possibles dans l'ordre corréspondant au nombre d'arrangement sans répétition (un seul classement posible pour un cheval) de 3 parmis 18

$$A_{18}^3 = \frac{18!}{(15)!} = 4896$$

Remarque

Pour démontrer les résulalts (1, 2), il suffit d'appliquer le principe de la multiplication.

Permutation

En général, une permutation est un arrangement (l'ordre est important) sur tout les élément de l'ensemble.

Il existe deux types de permutations :

Permutation sans répétition

Une permutation est un arrangement sans répétition de tous les éléments d'un ensemble E. Si l'ensemble contient n éléments, le nombre total de permutations est $n!$. Cette permutation est noté par P_n.

Remarque

Pour démontrer que $P_n = n!$, il suffit de remplacer dans l'équation (2) p par n

Permutation avec répétition

Soit E un ensemble contenant n éléments avec k éléments de E qui figurent plus d'une seule fois dans l'ensemble. Alors si $n_1, \ldots, n_k$, le nombre de permutation avec répétitions les éléments de E est égale á

$$P_n = \frac{n!}{n_1! \times n_2! \times \ldots n_k!} \tag{3}$$

Exemple

Combien de façons différentes peut-on ranger les lettres du mot "MATHEMATIQUES" ?

Solution :

Le mot "MATHEMATIQUES" contient 11 *lettres, mais il y a des lettres qui se répétent.*

- *Il y a 2 "M".*
- *Il y a 2 "A".*
- *Il y a 2 "T".*
- *Il y a 2 "E".*

Nous appliquons la formule des permutations avec répétition, on obtient

$$P_11 = \frac{11!}{(2!)^4} = \frac{39916800}{16} = 2494800$$

mots.

Combinaisons

U

ne combinaison est un choix non ordonné d'un certain nombre d'éléments parmi un ensemble. Le nombre de combinaisons de p éléments parmi n est noté C_n^p ou $\binom{n}{p}$ est donné par la formule :

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!} \tag{4}$$

et s'interprête comme le nombre de suite de p éléments pris sans remise dans E.

Preuve

Si A_n^p est le nombre d'arrangement sans répétition de p élément parmi n, alors pour obtenir le nombre de combinaison il suffit de diviser ce nombre par $p!$.

Exemple

$$E = \{a, b, c, d\}$$

La liste de tout les arrangements sans répétitions possibles à 3 lettres est :

abc	*acb*	*bac*	*bca*	*cab*	*cba*
abd	*adb*	*bad*	*bda*	*dab*	*dba*
acd	*adc*	*cad*	*cda*	*dac*	*dca*
bcd	*bdc*	*cbd*	*cdb*	*dbc*	*dcb*

Chacune des 4 lignes de ce tableau correspond une seule combinaison parmi les élements de E. Ainsi le nombre de combinaisons est égale à 4, qui est aussi :

$$\binom{n}{p} = \frac{A_3^4}{3!} = \frac{24}{6}$$

Exemple

Une Urne contient 10 boules, 4 rouges (R) et 6 jaunes (J), on tire au hasard et sans remise 6 boules. De combien de façon :

1. *On obtient un nombre équilibrÃ© en terme de couleur.*
2. *Le nombre de couleur rouge et de 4.*
3. *Plus de couleur jaunes que de rouges*

Solution

Dans les 3 cas, l'ordre n'est pas important, il s'agit donc déterminer le nombre de combinaison.

1) Cette situation signifie que le tirage contient 3 boules rouges et 3 boules jaunes. Le problème se décompose comme suit :

• On calcul le nombre de situations dans la quelle on obtient 3 rouges, égale à :

$$\binom{4}{3} = 4$$

• On calcul le nombre de situations dans la quelle on obtient 3 jaunes, égale à :

$$\binom{6}{3} = 20$$

• On applique ensuite le principe de multiplication, c'estàdire

$$\binom{4}{3} \times \binom{6}{3} = 4 \times 20 = 80$$

2) Si le nombre de couleur rouge est 4, alors celui des couleur jaunes et 2. Au total donc :

$$\binom{4}{4} \times \binom{6}{4} = 1 \times 15 = 15$$

3) Il y a 3 situations qui corrrespond à ce cas : (0R, 6J), (1R,5J), (2R,4J). Au total

$$\binom{4}{0} \times \binom{6}{6} + \binom{4}{1} \times \binom{6}{5} + \binom{4}{2} \times \binom{6}{4} = 1 \times 1 + 4 \times 6 + 6 \times 15 = 1 + 24 + 90 = 115$$

Merci pour votre attention