Université Mouloud Mammeri de Tizi Ouzou
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
Première année de Licence en Mathématiques 1
Année Universitaire 2023/2024

Analyse Combinatoire, cours et exercices corrigés

Préparé par Mr Smail Yousfi (2024)

Chapitre 1

Analyse Combinatoire

1.1 Introduction

L'analyse combinatoire est une branche des mathématiques qui étudie les différentes façons de sélectionner, organiser et compter des objets ou des éléments dans des ensembles finis. Elle se concentre sur l'étude des arrangements, des permutations et des combinaisons, ainsi que sur d'autres concepts liés à la structure et à la manipulation des ensembles discrets.
Les domaines d'applications de cette discipline des mathématiques sont nombreux parmi eux :

1.1.1 Probabilités et statistiques :

L'analyse combinatoire est largement utilisée pour calculer des probabilités dans divers scénarios, tels que les lancers de dés, les tirages aléatoires et les jeux de cartes. Elle est également utilisée pour déterminer le nombre de combinaisons possibles dans des échantillonnages et des expériences aléatoires.

1.1.2 Informatique et algorithmes :

L'analyse combinatoire est essentielle pour concevoir des algorithmes efficaces dans de nombreux domaines de l'informatique, tels que la théorie des graphes, la cryptographie, la compression de données et l'optimisation combinatoire.

1.1.3 Cryptographie :

Dans le domaine de la sécurité de l'information, l'analyse combinatoire est utilisée pour créer des algorithmes de cryptage et de décryptage robustes, ainsi que pour évaluer la sécurité des protocoles de communication.

1.1.4 Théorie des graphes :

L'analyse combinatoire est utilisée pour étudier les propriétés et les structures des graphes, notamment les cycles, les chemins, les arêtes, les sommets et les connexions entre eux. Elle est également utilisée pour résoudre des problèmes liés aux réseaux, à la planification des itinéraires et à la logistique.

1.1.5 Théorie des nombres :

L'analyse combinatoire est appliquée à de nombreux problèmes de théorie des nombres, tels que la factorisation des nombres, la recherche de nombres premiers, les congruences et les cycles de répétition dans les suites numériques.

1.1.6 Optimisation :

Dans les domaines de l'ingénierie, de la logistique et de la planification, l'analyse combinatoire est utilisée pour résoudre des problèmes d'optimisation, tels que le problème du voyageur de commerce, l'ordonnancement des tâches et l'affectation des ressources.

1.1.7 Biologie et bioinformatique :

L'analyse combinatoire est utilisée pour modéliser et analyser les interactions entre les gènes, les protéines et les voies métaboliques. Elle est également utilisée dans la conception de tests génétiques, la recherche de motifs génétiques et la modélisation des réseaux biologiques.

1.1.8 Jeux et puzzles :

L'analyse combinatoire est utilisée pour étudier et résoudre des problèmes de stratégie dans les jeux de société, les casse-tête mathématiques et les énigmes logiques.

1.2 Quelques rappels sur la théorie des ensembles

Définition 1.2.1. Selon le célèbre mathématicien Georg Cantor, un ensemble est une collection d'objets de même nature, définis et distincts. Ces objets étant appelés les éléments de l'ensemble.

Souvent pour distinguer typographiquement un ensemble de ces éléments on utilise une lettre majuscule pour le désigné $(E, F, G, H, ldots)$, ainsi une lettre minuscule pour designer ces éléments $(x,\ y,\ z)$.

Il existe deux façons pour définir les éléments d'un ensemble :
1. En représentant tous ces éléments (dans le cas où l'ensemble est fini).

Exemple 1.2.1. E={2, -6, 5, 7}

2. Et éventuellement de définir dans le cas où l'ensemble est infini, une relation entre ces éléments.

Exemple 1.2.2. $E = \{2n + 1, n \in \mathbb{N}\}$.

1.2.1 Appartenance, inclusion, égalité

Appartenance

Si x est un élément d'un ensemble E, on dit aussi que x appartient à E est on écrit $x \in E$. Si x n'est pas un élément de E, on dit aussi que x n'appartient pas à E est on écrit, $x \notin E$.

Inclusion

On dit qu'un ensemble E est inclus dans un autre ensemble F, si tout élément x de E est un élément de F. On écrit dans ce cas $E \subset F$.

$$E \subset F \Longleftrightarrow \forall x \in E, \quad x \in E \Longrightarrow x \in F.$$

On dit dans ce cas que E est un sous-ensemble de F.

Égalité

Deux ensembles E et F sont égaux s'ils ont les mêmes éléments.

$$E = F \Longleftrightarrow (E \subset F \wedge E \subset F) \Longleftrightarrow (x \in E \Longleftrightarrow x \in F).$$

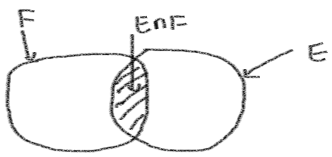
L'ensemble des nombres réels de racine carrée négative est égale à l'ensemble des nombres réels x différents de x, et les deux sont égaux à l'ensemble vide, malgré que les raisons d'être vide sont différentes dans les deux cas.

Réunion, intersection, différence symétrique

a) **L'intersection** de deux ensembles E et F est l'ensemble notée $E \cap F$ contenant les éléments qui sont à la fois dans E et dans F.

$$E \cap F = \{x, \ x \in E \wedge x \in F\}.$$

Si $E \cap F =$, on dit alors que les deux ensembles sont disjoints.

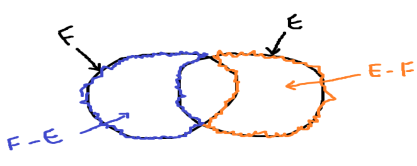


b) **La réunion** de E et F est l'ensemble noté $E \cup F$ contenant les éléments de E et les éléments de F comptés une seule fois.

$$E \cup F = \{x, \ x \in E \vee x \in F\}.$$

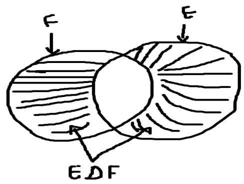
b) **La différence** de l'ensemble E et de l'ensemble F notée $E - F$ est l'ensemble contenant les éléments de E qui ne sont pas dans F.

$$E - F = \{x, \ x \in E \wedge x \notin F\}.$$



Remarque 1.2.1. Si F est un sous-ensemble E, alors $E - F$ est appelé aussi le complémentaire de F dans E noté C_E^F.

c) On appelle **différence symétrique** de E et F l'ensemble noté $E\Delta F$ et égale à $(E - F) \cup (F - E)$.



L'ensemble des parties d'un ensemble

On désigne l'ensemble des parties d'un ensemble E par $\mathcal{P}(E)$ qui contient ; l'ensemble vide, E lui même et tous les sous-ensembles A de E.

$$\mathcal{P}(E) = \{\emptyset, E, A/A \subset E\}.$$

Exemple 1.2.3. Si $E = \{x,\ y,\ z\}$, alors $\mathcal{P}(E) = \{\emptyset, E, \{x\}, \{y\}, \{z\}, \{x, y\}, \{x, z\}, \{y, z\}\}$.

Partition d'un ensemble

On dit qu'une famille finie $A_1,\ A_2, \ldots, A_n$ de sous-ensembles de E, constitue une partition pour E si :

1. $\bigsqcup\limits_{i=1}^{i=n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_n = E$.
2. $\forall\ i \neq j, \qquad A_i \cap A_j = \emptyset$.

Exemple 1.2.4. La famille $A_1 =]-\infty,\ 1[,\ A_2 = \{1\},\ A_3 =]1,\ +\infty[$ est une partition de l'ensemble des nombres réels.

Produit cartésien

L'ensemble des couples (x, y) tel que $x \in E$ et $y \in F$ noté $E \times F$ est appelé le produit cartésien de E et F.

$$E \times F = \{(x, y)/x \in E \wedge y \in F\}$$

Exemple 1.2.5. Si $E = \{1, 2\}$ et $F = \{a, b\}$ alors
$E \times F = \{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b)\}$.
$F \times E = \{(a, 1), (a, 2), (b, 1), (b, 2)\}$.

1.2.2 Propriétés

Soient E, F et G 3 ensembles, on admet sans demonstration les relations suivantes :

1. $E \cap F = F \cap E$ et $E \cup F = F \cup E$ (commutativité de l'intersection et de la réunion).
2. $(E \cap F) \cap G = E \cap (F \cap G)$ et $(E \cap F) \cap G = E \cap (F \cap G)$ (associativité de l'intersection et de la réunion).
3. $(E \cup F) \cap G = (E \cap G) \cup (F \cap G)$ et $(E \cap F) \cup G = (E \cup G) \cap (F \cup G)$ (distributivité de l'intersection (resp de la réunion) sur la réunion (resp sur l'intersection).
4. $E - (F \cap G) = (E - F) \cup (E - G)$ et $E - (F \cup G) = (E - F) \cap (E - G)$.
5. $(E \cap F) = E \Longleftrightarrow E \subset F$ et $(E \cup F) = E \Longleftrightarrow F \subset E$.
6. Si F et G sont des sous ensembles de E alors $C_E^{F \cap G} = C_E^F \cup C_E^G$ et $C_E^{F \cup G} = C_E^F \cap C_E^G$.

7. $E \times F = \emptyset \Longrightarrow E = \emptyset$ ou $F = \emptyset$.
8. $E \times F = F \times E \Longleftrightarrow E = \emptyset$ ou $F = \emptyset$ ou $E = F$.
9. $E \times (F \cup G) = (E \times F) \cup (E \times G)$.
10. $(E \cup G) \times F = (E \times F) \cup (G \times F)$.
11. $(E \times F) \cap (G \times H) = (E \cap G) \times (F \cap H)$.
12. $(E \times F) \cup (G \times H) = (E \cup G) \times (F \cup H)$.
13. $E\Delta F = (E \cup F) - (E \cap F)$.

1.2.3 Dénombrement

en analyse combinatoire, il est question de compter le nombre d'élément dans un ensemble fini, de compter le nombre de configuration données, le nombre de d'arrangement, le nombre de permutation, ... Ce concept se repose sur les deux principes suivants :

Principe de multiplication

Ce principe stipule que si une tâche peut être accomplie en m façons différentes et qu'une seconde tâche peut être accomplie indépendamment de la première en n façons différentes, alors les deux tâches peuvent être accomplies ensemble en $m \times n$ façons différentes.

Exemple 1.2.6. Supposons que trois équipes participent à un tournoi dans lequel sont déterminées une première, une deuxième et une troisième place. Pour faciliter l'identification des équipes, nous allons les désigner par les lettres A, B, C. Cherchons le nombre de manières différentes permettant d'attribuer le classement de ces 3 équipes.

— La première place peut être occupée par les trois équipes A, B, C (3 façons différentes d'occuper cette place).
— Si la pemière place est déja prise, il reste que 2 possibilités pour occuper la deuxième place.
— Si les deux prémières place sont occupées, alors il ne reste qu'une seule possibilité pour occuper la dernière place.

Par le principe de la mulatiplication, le nombre de facons possibles pour classer les équipes est :

Le nombre de façon pour la première place $\times$ le nombre de façon pour la deuxième place $\times$ le nombre de façon pour la troisème place$= 3 \times 2 \times 1 = 6$

1.3 Arrangements

Un arrangement est un ordre spécifique dans lequel les éléments d'un ensemble sont placés. Considérons un ensemble fini E contenant n éléments. Un arrangement de p éléments de l'ensemble E est une permutation ordonnée de p éléments de E.

Exemple 1.3.1. Posons

$$E = \{1, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$$

$$1256,\ 5621,\ 1245,\ 2145,\ 2221,\ 1212, \ldots$$

Remarque 1.3.1. Il ne s'agit pas de dénombrer ces permutations, il s'agit de savoir leurs nombres, deux situations peuvent se présenter.

1.3.1 Arrangements avec répétition

L'arrangement avec répétition de p éléments d'un ensemble E contenant n éléments est donné par la formule :

$$A_n^p = n \tag{1.1}$$

Dans l'example précédent : $A9_4 = 9^4 = 6561$ permutations

Exemple 1.3.2. Supposons qu'un voyageur planifie un voyage dans différentes villes pendant une semaine. Les villes à visiter sont Alger, Tizi Ouzou, et Boumerdes. Le voyageur peut visiter une même ville plusieurs fois au cours de la semaine et une seule ville en une seule journée. De combien de manières peut organiser sont voyage.
Solution A titre d'exemple le voyageur peur organiser sont voyage comme suit :
Dimanche : visiter Alger
Lundi : visiter Tizi Ouzou
Mardi : rester à Tizi Ouzou
Mercredi : visiter Boumerdes
Jeudi : rester à boumerdes
Vendredi :revenir à tizi
Samedi : repartir vers alger
Il s'agit donc d'un arrangement avec répétition de 7 parmi 3

$$A_3^7 = 3^7 = 2187$$

1.3.2 Arrangements sans répétition

L'arrangement sans répétition de p éléments d'un ensemble E contenant n éléments est donné par la formule :

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!} \tag{1.2}$$

Exemple 1.3.3. Dans une course de 18 chevaux, le nombre de tiercés possibles dans l'ordre corréspondant au nombre d'arrangement sans répétition (un seul classement posible pour un cheval) de 3 parmis 18

$$A_{18}^3 = \frac{18!}{(15)!} = 4896$$

Remarque 1.3.2. Pour démontrer les résulalts (1.1, 1.2), il suffit d'appliquer le principe de la multiplication.

1.4 Permutations Sans répétition

Une permutation est un arrangement sans répétition de tous les éléments d'un ensemble E. Si l'ensemble contient n éléments, le nombre total de permutations est $n!$. Cette permutation est notée par P_n.

Remarque 1.4.1. Pour démontrer que $P_n = n!$, il suffit de remplacer dans l'équation (1.2) p par n

1.5 Permutation avec répétition

Soit E un ensemble contenant n éléments avec k éléments de E qui figurent plus d'une seule fois dans l'ensemble. Alors si $n_1, \ldots, n_k$, le nombre de permutation avec répétitions les éléments de E est égale à

$$P_n = \frac{n!}{n_1! \times n_2! \times \ldots n_k!} \tag{1.3}$$

Exemple 1.5.1. Combien de façons différentes peut-on ranger les lettres du mot "MATHEMATIQUES" ?
Solution :
Le mot "MATHEMATIQUES" contient 11 lettres, mais il y a des lettres qui se répètent.

— Il y a 2 "M".
— Il y a 2 "A".
— Il y a 2 "T".
— Il y a 2 "E".

Nous appliquons la formule des permutations avec répétition, on obtient

$$P_1 1 = \frac{11!}{(2!)^4} = \frac{39916800}{16} = 2494800$$

mots.

1.6 Combinaisons

Une combinaison est un choix non ordonné d'un certain nombre d'éléments parmi un ensemble. Le nombre de combinaisons de p éléments parmi n est noté C_n^p ou $\binom{n}{p}$ est donné par la formule :

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!} \tag{1.4}$$

et s'interprête comme le nombre de suite de p éléments pris sans remise dans E.

Preuve. Si A_n^pet le nombre d'arrangement sans répétition de p élément parmi n, alors pour obtenir le nombre de combinaison il suffit de diviser ce nombre par $p!$.

Exemple 1.6.1.

$$E = \{a, b, c, d\}$$

La liste de tout les arrangements sans répétitions possibles à 3 lettres est :

abc	acb	bac	bca	cab	cba
abd	adb	bad	bda	dab	dba
acd	adc	cad	cda	dac	dca
bcd	bdc	cbd	cdb	dbc	dcb

Chacune des 4 lignes de ce tableau correspond une seule combinaison parmi les élements de E. Ainsi le nombre de combinaisons est égale à 4, qui est aussi :

$$\frac{A_3^4}{3!} = \frac{24}{6}$$

Université Mouloud Mammeri de Tizi Ouzou
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
Première année de Licence en Informatique 1
Année Universitaire 2023/2024

Série de TD N° 1 : Analyse Combinatoire

Exercice 1.

Un groupe de 25 animaux composés de 10 tigres, 8 gazelles et 7 zèbres arrivent dans un zoo composés de cellules alignées. De combien de façon peut t-ont les alignés en cellules différentes si :

a) Il y a aucune restriction sur les cellules.

b) Les tigres sont dans des cellules différentes alignées l'une derrière l'autre.

Exercice 2.

Combien de nombre différents de six chiffres existe-ils :
a) S'il y a aucune restriction.
b) Si les nombre doivent être divisible par 5.
c) Si les répétition des chiffres sont exclues.

Exercice 3.

Une compagnie aérienne souhaite offrir à ces 19 fidèles clients, 4 billets d'avions vers des destinations touristiques. Determiner le nombre de façon de distribuer ces billets si :
a) Les billets sont numérotés et chaque client ne peut recevoir qu'un seul billet.
b) Les billets sont numérotés et chaque client peut recevoir plusieurs billets.
c) Les billets ne sont pas numérotés et chaque client ne peut recevoir qu'un seul billet.

Exercice 4.

Le poste de police d'une petite ville compte 10 agent de polices. Si l'organisation de ce poste est de mettre 5 agents en patrouille, 2 en poste travaillant activement et 3 en reserve, a combien de répartitions de ces agents en 3 groupes peut-ont effectués.

Exercice 5.

Une boite contient 12 boules : 3 rouges, 4 bleus et 5 jaunes. On tire simultanément 3 boules. Combien de combinaisons différentes existe-t-il si on désire avoir une boule de chaque couleur.

Exercice 6.

On dispose de 4 hélicoptères de tourisme, de 4 pilotes et de 8 hôtesses de l'air. Combien de façons différentes y a-t-il d'attribuer les pilotes et hôtesses de l'air aux hélicoptères de manière que chaque hélicoptère ait un pilote et deux hôtesses de l'air ?

Exercice 7. Farid et Sarah font partie d'une équipe de 8 joueurs (6 garçons et 2 filles). On décide de fabriquer un comité de 3 joueurs.

a) Combien y-a-t-il de comités possibles ?
b) Combien y-a-t-il de comités contenant exactement 2 garçons et 1 fille ?
c) Combien y-a-t-il de comités contenant au moins deux garçons ?

On veut que Farid et Sarah soient ensemble dans le comité. Combien y-a-t-il de comités possibles ? On ne veut pas que Farid et Sarah soient ensemble dans le comité. Combien y-a-t-il de comités possibles ?

Corrigé

Corrigé exercice n° 1.

a) Les animaux sont tous différents, nous sommes dans le cas d'une permutation avec $n = 25$. Donc

$$P_{25} = 25!$$

b) Ayant regroupés les 10 tigres, il nous reste : $1 + 8 + 7 = 16$ éléments à permuter donc 16!. Mais à l'intérieur du groupes des 10 tigres, il existe 10! permutations possibles, donc au total on obtient : $16! \times 10!$ dispositions différentes.
c) Il existe $A_{25}^{10} = \frac{25!}{15!}$ façons pour choisir les 10 tigres, et $P_{15} = 15!$ façons de d'alignés les 15 autres animaux. En tout on trouve : $\frac{25!}{15!} \times 15! = 25!$.

Corrigé exercice n° 2.

a) Le premier des six chiffres doit être différents de 0, donc il y a 9 façons différente de le choisir. Les 5 autres chiffres vont être choisi parmi 10 possibilités. Au total on obtient : 9×10^5 façons .
b) Le premier des six chiffres doit être différents de 0, donc il y a 9 façons différente de le choisir. Le sixième on le choisi parmi 2 possibilités. Les 4 autres chiffres vont être choisi parmi 10 possibilités. Au total : $9 \times 10^4 \times 2$ façons.
c) Le premier des six chiffres doit être différents de 0, donc il y a 9 façons différente de le choisir, le deuxième $(10 - 1)$, le troisième $(10 - 2)$, le quatrième $(10 - 3)$, le cinquième $(10 - 4)$, le sixième $(10 - 5)$. Donc au total : $9 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5$ façons.

Corrigé exercice n° 3.

a) C'est un arrangement sans répétition de 4 parmi 19 :$A_{19}^4 = \frac{19!}{15!}$.
b) C'est un arrangement avec répétition de 4 parmi 19 :$A_{19}^4 = 19^4$.
c) L'ordre importe et la répétition n'est pas permise, ce qui correspond au nombre de combinaison de 4 parmi 19. $C_{19}^4 = \frac{19!}{4! \times 15!}$.

Corrigé exercice n° 4.

On calcul avant tous :

1. Le nombre de façon de choisir 5 agents en patrouille parmi 10, qui correspond au :

$$C_{10}^5 = 252$$

2. Le nombre de façon de choisir 2 agents en poste parmi 10, qui correspond au :

$$C_{10}^2 = 45$$

3. Le nombre de façon de choisir 3 agents en reserve parmi 10, qui correspond au :

$$C_{10}^{3} = 120$$

Au total et par la règle de la multiplication on obtient

$$252 \times 45 \times 120 = 1360800$$

Corrigé exercice n° 5.

Le problème peut être décomposer comme suit :
Le nombre de façon de choisir une boule rouge parmi 3 vaut $C_3^1 = 3$
Le nombre de façon de choisir une boule bleu parmi 4 vaut $C_4^1 = 4$
Le nombre de façon de choisir une boule jaune parmi 5 vaut $C_5^1 = 5$
Au total : $3 \times 4 \times 5 = 60$ façons différentes

Corrigé exercice n° 6.

On fait les choix successifs suivants : on choisit 2 hôtesses parmi 8 et un pilote parmi 4 pour le premier hélicoptère. Il y a donc

$$C_8^2 \times C_4^1 = 28 \times 4 = 112$$

Pour le deuxième hélicoptère, on choisit 2 hôtesses parmi les 6 restantes, puis un pilote parmi les 3 restants. Il y a donc

$$C_6^2 \times C_3^1 = 15 \times 3 = 45$$

Pour le troisième hélicoptère, on choisit 2 hôtesses parmi les 4 restantes, puis un pilote parmi les 2 restants. Il y a donc

$$C_4^2 \times C_2^1 = 3 \times 2 = 6$$

pour le dernier hélicoptère, on n'a plus de choix à faire : on lui affecte les deux dernières hôtesses et le dernier pilote, donc une seule façon. Au total on obtient :

$$112 \times 45 \times 6 = 51072$$

Corrigé exercice n° 7.

a) Il s'agit de choisir trois joueurs parmi 8. Le nombre de comités possibles est donc de $C_8^3 = 56$.
b) Il s'agit de choisir deux garçons parmi 6, puis une fille parmi 2. Le nombre de choix possibles est donc de

$$C_6^2 \times C_2^1 = 30.$$

c)On compte le nombre de comités comprenant 3 garçons et le nombre de comités comprenant exactement deux garçons(déjà calculé)

$$C_6^3 + 30 = 50$$

Si on reserve une place pour Farid et Sarah, donc ll ne reste qu'à choisir le dernier membre du comité : il y a donc 6 comités comprenant à la fois Farid et Sarah.
On compte les comités comprenant Farid, mais pas Sarah et les comités comprenant Sarah, mais pas Farid. Dans le premier cas, on trouve C_6^2 comités (il reste à choisir deux joueurs parmi 6, puisqu'on ne peut plus prendre ni Farid, ni Sarah). Dans le second cas, on a aussi C_6^2 comités. On compte enfin les comités ne comprenant ni Farid, ni Sarah. Il y en a C_3^6.
Finalement, le nombre total de comités ne comprenant pas simultanément Farid et Sarah est $15 + 15 + 20 = 50$