

Série de TD N° 1 : Analyse Combinatoire

Exercice n° 1.

Un groupe de 25 animaux composés de 10 tigres, 8 gazelles et 7 zèbres arrivent dans un zoo composés de cellules alignées. De combien de façon peut-t-on les alignés en cellules différentes si :

- a) Il y a aucune restriction sur les cellules.
- b) Les tigres sont dans des cellules différentes alignées l'une derrière l'autre.

Exercice n° 2.

Combien de nombre différents de six chiffres existe-ils :

- a) S'il y a aucune restriction.
- b) Si les nombre doivent être divisible par 5.
- c) Si les répétition des chiffres sont exclues.

Exercice n° 3.

Une compagnie aérienne souhaite offrir à ces 19 fidèles clients, 4 billets d'avions vers des destinations touristiques. Déterminer le nombre de façon de distribuer ces billets si :

- a) Les billets sont numérotés et chaque client ne peut recevoir qu'un seul billet.
- b) Les billets sont numérotés et chaque client peut recevoir plusieurs billets.
- c) Les billets ne sont pas numérotés et chaque client ne peut recevoir qu'un seul billet.

Exercice n° 4.

Le poste de police d'une petite ville compte 10 agents de polices. Si l'organisation de ce poste est de mettre 5 agents en patrouille, 2 en poste travaillant activement et 3 en réserve, à combien de répartitions de ces agents en 3 groupes peut-on effectués.

Exercice n° 5.

Une boîte contient 12 boules : 3 rouges, 4 bleus et 5 jaunes. On tire simultanément 3 boules. Combien de combinaisons différentes existe-t-il si on désire avoir une boule de chaque couleur.

Exercice n° 6.

On dispose de 4 hélicoptères de tourisme, de 4 pilotes et de 8 hôtesses de l'air. Combien de façons différentes y a-t-il d'attribuer les pilotes et hôtesses de l'air aux hélicoptères de manière que chaque hélicoptère ait un pilote et deux hôtesses de l'air ?

Exercice n° 7. Farid et Sarah font partie d'une équipe de 8 joueurs (6 garçons et 2 filles). On décide de fabriquer un comité de 3 joueurs.

- a) Combien y-a-t-il de comités possibles ?
- b) Combien y-a-t-il de comités contenant exactement 2 garçons et 1 fille ?
- c) Combien y-a-t-il de comités contenant au moins deux garçons ?

On veut que Farid et Sarah soient ensemble dans le comité. Combien y-a-t-il de comités possibles ? On ne veut pas que Farid et Sarah soient ensemble dans le comité. Combien y-a-t-il de comités possibles ?

Corrigé

Corrigé exercice n° 1.

a) Les animaux sont tous différents, nous sommes dans le cas d'une permutation avec $n = 25$. Donc

$$P_{25} = 25!$$

b) Ayant regroupés les 10 tigres, il nous reste : $1 + 8 + 7 = 16$ éléments à permuter donc $16!$. Mais à l'intérieur du groupes des 10 tigres, il existe $10!$ permutations possibles, donc au total on obtient : $16! \times 10!$ dispositions différentes.

c) Il existe $A_{25}^{10} = \frac{25!}{15!}$ façons pour choisir les 10 tigres, et $P_{15} = 15!$ façons de d'alignés les 15 autres animaux. En tout on trouve : $\frac{25!}{15!} \times 15! = 25!$.

Corrigé exercice n° 2.

a) Le premier des six chiffres doit être différents de 0, donc il y a 9 façons différente de le choisir. Les 5 autres chiffres vont être choisi parmi 10 possibilités. Au total on obtient : 9×10^5 façons .

b) Le premier des six chiffres doit être différents de 0, donc il y a 9 façons différente de le choisir. Le sixième on le choisi parmi 2 possibilités. Les 4 autres chiffres vont être choisi parmi 10 possibilités. Au total : $9 \times 10^4 \times 2$ façons.

c) Le premier des six chiffres doit être différents de 0, donc il y a 9 façons différente de le choisir, le deuxième $(10 - 1)$, le troisième $(10 - 2)$, le quatrième $(10 - 3)$, le cinquième $(10 - 4)$, le sixième $(10 - 5)$. Donc au total : $9 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5$ façons.

Corrigé exercice n° 3.

a) C'est un arrangement sans répétition de 4 parmi 19 : $A_{19}^4 = \frac{19!}{15!}$.

b) C'est un arrangement avec répétition de 4 parmi 19 : $A_{19}^4 = 19^4$.

c) L'ordre importe et la répétition n'est pas permise, ce qui correspond au nombre de combinaison de 4 parmi 19. $C_{19}^4 = \frac{19!}{4! \times 15!}$.

Corrigé exercice n° 4.

On calcul avant tous :

1. Le nombre de façon de choisir 5 agents en patrouille parmi 10, qui correspond au :

$$C_{10}^5 = 252$$

2. Le nombre de façon de choisir 2 agents en poste parmi 10, qui correspond au :

$$C_{10}^2 = 45$$

3. Le nombre de façon de choisir 3 agents en reserve parmi 10, qui correspond au :

$$C_{10}^3 = 120$$

Au total et par la règle de la multiplication on obtient

$$252 \times 45 \times 120 = 1360800$$

Corrigé exercice n° 5.

Le problème peut être décomposer comme suit :

Le nombre de façon de choisir une boule rouge parmi 3 vaut $C_3^1 = 3$

Le nombre de façon de choisir une boule bleu parmi 4 vaut $C_4^1 = 4$

Le nombre de façon de choisir une boule jaune parmi 5 vaut $C_5^1 = 5$

Au total : $3 \times 4 \times 5 = 60$ façons différentes

Corrigé exercice n° 6.

On fait les choix successifs suivants : on choisit 2 hôtesse parmi 8 et un pilote parmi 4 pour le premier hélicoptère. Il y a donc

$$C_8^2 \times C_4^1 = 28 \times 4 = 112$$

Pour le deuxième hélicoptère, on choisit 2 hôtesse parmi les 6 restantes, puis un pilote parmi les 3 restants. Il y a donc

$$C_6^2 \times C_3^1 = 15 \times 3 = 45$$

Pour le troisième hélicoptère, on choisit 2 hôtesse parmi les 4 restantes, puis un pilote parmi les 2 restants. Il y a donc

$$C_4^2 \times C_2^1 = 3 \times 2 = 6$$

pour le dernier hélicoptère, on n'a plus de choix à faire : on lui affecte les deux dernières hôtesse et le dernier pilote, donc une seule façon. Au total on obtient :

$$112 \times 45 \times 6 = 51072$$

Corrigé exercice n° 7.

a) Il s'agit de choisir trois joueurs parmi 8. Le nombre de comités possibles est donc de $C_8^3 = 56$.

b) Il s'agit de choisir deux garçons parmi 6, puis une fille parmi 2. Le nombre de choix possibles est donc de

$$C_6^2 \times C_2^1 = 30.$$

c) On compte le nombre de comités comprenant 3 garçons et le nombre de comités comprenant exactement deux garçons(déjà calculé)

$$C_6^3 + 30 = 50$$

Si on réserve une place pour Farid et Sarah, donc il ne reste qu'à choisir le dernier membre du comité : il y a donc 6 comités comprenant à la fois Farid et Sarah.

On compte les comités comprenant Farid, mais pas Sarah et les comités comprenant Sarah, mais pas Farid. Dans le premier cas, on trouve C_6^2 comités (il reste à choisir deux joueurs parmi 6, puisqu'on ne peut plus prendre ni Farid, ni Sarah). Dans le second cas, on a aussi C_6^2 comités. On compte enfin les comités ne comprenant ni Farid, ni Sarah. Il y en a C_3^6 . Finalement, le nombre total de comités ne comprenant pas simultanément Farid et Sarah est $15 + 15 + 20 = 50$