

# Série d'exercices sur l'AFC

Exod:

1) tableau des probabilités:

	Perçu sucré	Perçu Acide	Perçu Amer	$P_{i \cdot}$
Sucré	$\frac{1}{3}$	0	0	$P_{1 \cdot} = \frac{1}{3} + 0 + 0 = \frac{1}{3}$
Acide	0	$\frac{4}{15}$	$\frac{1}{15}$	$P_{2 \cdot} \approx 0,333$
Amer.	0	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{5}$	$P_{3 \cdot} \approx 0,333$
$P_{\cdot j}$	$P_{\cdot 1} = 0,33$	$P_{\cdot 2} = 0,4$	$P_{\cdot 3} = 0,27$	1

2) Tableau des profils lignes

le terme général est

$$\frac{b_{ij}}{b_{i \cdot}} \quad 1 \leq i \leq 3$$

$$\frac{b_{ij}}{b_{\cdot j}} \quad 1 \leq j \leq 3$$

	Perçu sucré	Perçu Acide	Perçu Amer	
Sucré	1	0	0	1
Acide	0	0.8	0.2	1
Amer	0	0.4	0.6	1

• Tableau des profils colonnes:

	Perçu sucré	Perçu Acide	Perçu Amer
Sucré	1	0	0
Acide	0	0,666	0,25
Amer	0	0,333	0,75
	1	1	1

En utilisant les notations suivantes (voir cours):

$$N = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 2 \\ 0 & 4 & 6 \end{pmatrix} = (n_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq 3 \\ 1 \leq j \leq 3}}$$

$$D_1 = \text{diag}(n_{i.})_{1 \leq i \leq 3} = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$$

$$D_2 = \text{diag}(n_{.j})_{1 \leq j \leq 3} = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$$

les métriques et les matrices de poids pour les tableaux des profils lignes et colonnes ont été résumées dans le tableau suivant:

	Métrique	Poids
Profils lignes	$M = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2,5 & 0 \\ 0 & 0 & 3,75 \end{pmatrix}$ $= n \cdot D_2^{-1}$	$P_{oid} = \begin{pmatrix} 0,333 & 0 & 0 \\ 0 & 0,333 & 0 \\ 0 & 0 & 0,333 \end{pmatrix}$ $= \frac{1}{n} D_1$
Profils colonne	$n D_1^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$	$\frac{1}{n} D_2 = \begin{pmatrix} 0,333 & 0 & 0 \\ 0 & 0,4 & 0 \\ 0 & 0 & 0,2866 \end{pmatrix}$

La distance entre 2 profils lignes  $i$  et  $i'$  est:

$$d(i, i') = \sum_{j=1}^3 \frac{1}{f_{0j}} \left( \frac{f_{ij}}{f_{i.}} - \frac{f_{i'j}}{f_{i'.}} \right)^2$$

La distance entre un profil ligne  $i$  et le centre de gravité  $g = (f_{.1}, f_{.2}, f_{.3})$  vaut:

$$d^2(i, g) = \sum_{j=1}^3 \frac{1}{f_{i.}} \left( \frac{f_{ij}}{f_{i.}} - f_{.j} \right)^2$$

Les résultats obtenus pour tout les profils lignes sont résumés dans le tableau suivant:

	sucré	Acide	Amer	$g$
sucré	0	4.75	4.75	2
Acide	4.75	0	1.00	0.75
Amer	4.75	1	0.	0.75

La distance de  $\chi^2 = n \cdot \sum_{i=1}^3 f_{i.} \cdot d^2 \left( \frac{f_{i.}}{f_{i.}}, g \right)$

$$\chi^2 = 35$$

La distance entre 2 profils colonnes vaut:

$$d^2(j, j') = \sum_i \frac{1}{f_{i.}} \left( \frac{f_{ij}}{f_{i.}} - \frac{f_{ij'}}{f_{i.}} \right)^2$$

la distance d'un profil colonne  $f^j$  au centre de gravité  $g = (f_{1.}, f_{2.}, f_{3.})^t$  vaut :

$$d^2(f^j, g) = \sum_{i=1}^3 \frac{1}{f_{i.}} \left( \frac{b_{ij}}{f_{i.}} - f_{i.} \right)^2$$

les résultats obtenus pour tous les profils colonnes sont donnés dans le tableau suivant :

	Perçu Amer	Perçu Aade	Perçu Soeri	$g$
Perçu Amer	0	4.667	4.875	2
Perçu Aade	4.667	0	1.041	0.667
Perçu Soeri	4.875	1.041	0	0.875

la distance de  $X^2$  vaut :

$$X^2 = n \cdot \sum_{j=1}^3 f_{.j} \cdot d^2 \left( \frac{f_{.j}}{f_{.j}}, g \right)$$

$$\boxed{X^2 = 35}$$

la valeur critique d'une statistique de  $X^2_4$  pour un seuil de 0,05 vaut : 9,49 < 35 donc on rejette l'hypothèse d'indépendance avec une probabilité  $P = 0,05$  de se tromper.

$$5) \quad \bar{I} = \sum_{j=1}^3 f_{.j} \cdot d^2 \left( \frac{b_{.j}}{f_{.j}}, g \right) = \frac{35}{30} = 1.1667$$

Dans le cas du tableau des profils lignes:

$$X^t D X M = X^t \cdot \frac{1}{n} \cdot D_1 \cdot X \cdot n \cdot D_2^{-1}$$

$$\boxed{X^t D X M = X^t D_1 X \cdot D_2^{-1}}$$

Le calcul donne:

$$\text{trac}(X^t D X M) = 2,1667 = I^{-1}$$

(voir le fichier "AFC\_sauv.r")

Dans le cas du tableau de profils colonnes:  
le tableau  $X$  correspond à la transposée  
du tableau des profils colonnes (voir cours).

$$\begin{aligned} X^t D X M &= X^t \cdot \frac{1}{n} \cdot D_2 \cdot X \cdot n \cdot D_1^{-1} \cdot n \\ &= X^t D_2 \cdot X \cdot D_1^{-1} \end{aligned}$$

le calcul donne:

$$\text{trac}(X^t D X M) = 2,1667 = I^{-1}$$

(voir fichier AFC\_sauv.r)

Nous avons déjà vu dans la leçon de C'AFR, que les constantes de individus sont les composantes ~~de~~ des nouvelles variables (composantes principales).

Donc pour l'AFC sur le tableau de profils lignes:

la première composante principale est:

$$Q_1 = \left( \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^t. \text{ Aa variable:}$$

$$Q_1 = VC_1 = f_{11} \cdot \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 + f_{12} \cdot \left( -\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 + f_{13} \cdot \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2$$

$$= 0.333 \times 2 + 0.333 \times \frac{1}{2} + 0.333 \times \frac{1}{2}$$

$$= 0.333(3) = \boxed{1. = \lambda_1}$$

$$Q_2 = VC_2 = f_{21} \cdot (0)^2 + 0.333 \left( \frac{1}{2} \right)^2 + \cancel{0.333} \left( \frac{1}{2} \right)^2$$

$$\boxed{Q_2 = 0.333 \times \frac{2}{4} = 0.167}$$

Les valeurs propres doivent être les mêmes pour l'AFC sur les profils colonnes:

$$Q_1 = VC_1 = 0.333 \times \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 + 0.4 \times \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 + 0.2666 \times \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2$$

$$\boxed{Q_1 = 2}$$

$$Q_2 = 0 + 0.4(0.408)^2 + 0.2666(0.612)^2 = \boxed{0.167}$$

1) En réalisant une représentation graphique unique pour les deux masses lignes et colonnes, on constate via les valeurs des coordonnées au carré que les deux profils sucré et perçu sucré sont très proches et l'écart à l'indépendance sur l'axe 1.

2) Sur le plan des profils, on aperçoit les profils sucré et perçu sucré à l'opposé des profils amer, Acide, perçu amer et perçu Acide.

• Les relations barycentriques (voir cours) que chaque profil ligne (resp. colonne) est le barycentre des profils colonnes (resp. lignes)  
par exemple: le profil "sucrè" coïncide parfaitement avec Perçu sucré car:  
dans le tableau des profils ligne (resp. colonnes) parmi les 10 profils sucré tous ont été perçu sucré en aucun n'est perçu Acide ni perçu amer; donc le profil sucrè ligne est toujours du côté du profil colonne pour lequel est très lié, Cane forte association).

c'est la même interprétation pour: Acid-perçu Acid  
Amer-perçu amer.