Université MOULOUD MAMMERI

Faculté Des Sciences -Département MI

Tizi Ouzou.

Janvier 2023.

Examen d'Algèbre (1)

EXO 1 : E , F deux ensembles q.l.c.q.s. Montrer que :

$\mathcal{P}(E) = \mathcal{P}(F) \Leftrightarrow E = F.$

EXO 2 : $\mathcal{R}$ la relation définie sur $\mathbb{N}$, par :

$x\,\mathcal{R}y \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}^*;\ \ y = x^n\ \ ;\ \forall x, y \in \mathbb{N}.$

Montrer que $\mathcal{R}$ *est une relation d'ordre partiel.*

EXO 3 : E , F deux ensembles. $f\colon E \longrightarrow F$ et $g\colon F \longrightarrow E$ deux applications. On suppose :

$gofogof$ est surjective et $fogofog$ est injective. Montrer que f et g sont bijectives.

EXO 4 : $(G, .)$ un groupe , A une partie de G . On note :

$N(A) = \{x \in G\ ;\ \ A.x = x.A\}$ appelé normalisateur de A dans G.

$C(A) = \{x \in G\ ;\ \forall a \in A,\ \ a.x = x.a\}$ appelé centralisateur de A dans G.

Montrer que : $N(A) < G$ et $C(A) < N(A)$.

$<$: veut dire sous groupe de.

EXO 5 : E un ensemble ; A , B deux parties de E. Montrer que :

a) $\overline{A}\,\Delta\,\overline{B} = A\,\Delta\,B.$

b) $A - B = A\ \Leftrightarrow B - A = B.$

C) $A \cap B = A \cup B \Leftrightarrow A = B.$

-Le Barème est 4 pts pour chaque exo.

-L'exo5 est compté aussi comme test de TD.

00

Corrigé de L'Examen d'Algèbre (1).

4pts

Exo 1 : Supposons que :

$\Rightarrow$/ $\mathcal{P}(E)=\mathcal{P}(F)$. Soit $x \in E \Rightarrow \{x\} \in \mathcal{P}(E)=\mathcal{P}(F)$

$\Rightarrow \{x\} \subset F \Rightarrow x \in F$ d'où $E \subset F$ — (1) 2

Soit $y \in F \Rightarrow \{y\} \in \mathcal{P}(F)=\mathcal{P}(E) \Rightarrow \{x\} \subset E$

$\Rightarrow x \in E$ d'où $F \subset E$ — (2) 1

Alors $E=F$.

$\Leftarrow$/ si $E=F \Rightarrow \mathcal{P}(E)=\mathcal{P}(F)$ évident. 1

Exo 2 : 4pts

$x \mathcal{R} y \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}^* ; y=x^n \quad ; \forall x,y \in \mathbb{N}$.

- $\mathcal{R}$ réfléxive : $\forall x \in \mathbb{N}$. $\exists n=1 \in \mathbb{N}^*$ t.q $x=x^1 \Leftrightarrow x\mathcal{R}x$.

donc $\mathcal{R}$ est réfléxive. 1

- $\mathcal{R}$ antisymétrique :

$\forall x, y \in \mathbb{N}$ alors :

$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}^* ; y=x^n$ — (1)

et

$y\mathcal{R}x \Leftrightarrow \exists m \in \mathbb{N}^* ; x=y^m$ — (2) 1

de (1) et (2) On a : $y=(y^m)^n=y^{m.n}$

$\Rightarrow m.n=1$ et $m,n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow m=1=n$. 1

1

donc : $x = y$.

Alors : $\mathcal{R}$ est antisymétrique.

_ $\mathcal{R}$ transitive :

$\forall x, y$ et $z \in \mathbb{N}$ On a :

$x \mathcal{R} y \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}^*$; $y = x^n$ ... ①

et $y \mathcal{R} z \Leftrightarrow \exists p \in \mathbb{N}^*$; $z = y^p$ .. ②

1

① et ② $\Rightarrow z = (x^n)^p = x^{n.p}$, $n.p \in \mathbb{N}^*$ alors

$x \mathcal{R} z$.

d'où $\mathcal{R}$ est transitive.

Donc, $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre.

1

Cet ordre est partiel (car $3 \not\mathcal{R} 2$ et $2 \not\mathcal{R} 3$ par exemple).

Exo 3 ; 4 pts

si $g \circ f \circ g \circ f = g \circ (f \circ g \circ f)$ est surjective alors,

1 d'après le cours, On a : g est surjective ①

si $f \circ g \circ f \circ g = (f \circ g \circ f) \circ g$ est injective alors

(d'après le cours aussi) .. ②

1 g est injective

2

① et ② $\Rightarrow$ g est bijective.

g est bijective alors g^{-1} existe et bijective.

On a : 1 $f \circ g \circ f = \begin{cases} g^{-1} \circ (g \circ f \circ g \circ f) \text{ est surjective} \\ (f \circ g \circ f \circ g) \circ g^{-1} \text{ est injective.} \end{cases}$

$\Rightarrow$ 1 $f \circ g \circ f$ est bijective. Comme g est bijective alors f est bijective

c.q.f.d. f et g bijectives.

<u>Exo 4 :</u> $(G, \cdot)$ est 1 groupe. $A \in \mathcal{P}(G)$.

$N(A) < G$ est 1 sous-groupe du groupe de G, car :

1 ① $\forall x, y \in N(A)$ montrons que $x \cdot y \in N(A)$??

On a : $A \cdot (x \cdot y) = (A \cdot x) \cdot y = (x \cdot A) \cdot y = x \cdot (A \cdot y) = x \cdot (y \cdot A)$
$= (x \cdot y) \cdot A$ d'où $x \cdot y \in N(A)$.

② $\forall x \in N(A)$ montrons que x' symétrique de

1 x dans G appartient à $N(A)$??

en effet, $A \cdot x' = e \cdot A \cdot x' = (x' \cdot x) \cdot A \cdot x'$
$= x' \cdot (x \cdot A) \cdot x' = x' \cdot (A \cdot x) \cdot x'$

donc : $A.x' = x'.A.(x.x') = x'.A.e$

$A.x' = x'.A.$; e : élét neutre de G.

d'où : $x' \in N(A)$

Alors $N(A)$ est 1 sous-groupe de G.

· Pour $C(A)$ sous groupe de $N(A)$

en effet ; $\forall x \in C(A)$, on a : $x.a = a.x$

0,5

$\forall a \in A \Rightarrow x.A = A.x \Rightarrow x \in N(A)$

donc $C(A) \subseteq N(A)$.

maintenant ; $\forall x, y \in C(A)$, montrons que $x.y \in C(A)$ en effet :

$$(x.y).a = x.(y.a) \quad \forall a \in A.$$

0,5

$$= x.(a.y)$$
$$= (x.a).y$$
$$= (a.x).y$$
$$= a.(x.y) \quad \forall a \in A.$$

d'où $x.y \in C(A)$.

$\forall x \in C(A)$; montrons que $x' \in C(A)$??

1

$x'.a = x'.a.e = x'.a.(x.x') = x'.(a.x).x'$

$= x'.(x.a).x' = (x'.x).a.x' = e.a.x'$ $\forall a \in A$. Alors $x' \in C(A)$.

donc : $x'.a = a.x'$

D'où : C(A) est 1 sous-groupe de N(A).

Exo5 :

$A, B \in \mathcal{P}(E)$.

Exo5 est Comptée Comme exo test de TD

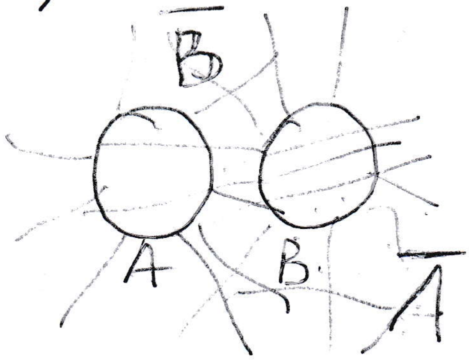
a) $\overline{A} \Delta \overline{B} = A \Delta B$??

On a : $A \Delta B = (\overline{A} \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$ d'après le cours, le T-D.

1,5

$= (\overline{\overline{A}} \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap \overline{\overline{B}})$

$= \overline{A} \Delta \overline{B}$.



b) $A - B = A \iff A \cap \overline{B} = A$

1,5

$\iff B \cap \overline{A} = B$

$\iff B - A = B$.

c) $A \cap B = A \cup B \overset{??}{\iff} A = B$.

0,25 si $A \cap B = A \cup B \Rightarrow A \subset A \cup B = A \cap B \subset B \Rightarrow A \subset B$ ①

0.25 si $A \cap B = A \cup B \Rightarrow B \subset A \cup B = A \cap B \subset A \Rightarrow B \subset A$ ②

① et ② $\Rightarrow A = B$

0,5 si $A = B \Rightarrow A \cap B = A = B = A \cup B$

d'où $A \cap B = A \cup B \iff A = B$.