U.M.M.T.O.
Faculté des sciences
Département de Mathématiques
Master 1 en Recherche Opérationnelle
Chargée de cours: Mme Khellas

Tizi-Ouzou, le 30/05/2022.

`Devoir de Maison sur les observateurs d'états`

A remettre au plus tard le jeudi 09 juin 2022 à 15h.

Problème 1 *Etant donné un système linéaire réprésenté par le modèle d'état*

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases} \tag{1}$$

où u est l'entré du système, y est sa sortie, supposée mesurable et x est le vecteur état de dimension n. Afin d'estimer les états du système, on se propose de concevoir un observateur d'état de la forme:

$$\begin{cases} \dot{x}_0 = Ax_0 + Bu + L(y - y_0) \\ y_0 = Cx_0 \end{cases} \tag{2}$$

où y_0 est la sortie de l'observateur, x_0 le vecteur contenant ses états internes et L est le gain de l'observateur à determiner.

Condition d'existence et de convergence de l'observateur

Avant d'entamer le calcul du gain L de l'observateur, il est important de vérifier à priori si cet observateur existe. Pour ce faire, il faut vérifier que les états du système contenus dans le vacteur état soient tous observables. On utilise alors le théorème de Kalmann.

1. *Montrer que la solution du système* (1) *est donnée par:*

$$x(t) = e^{tA}x_0 + \int_0^t e^{(t-s)A}Bu(s)ds \tag{3}$$

2. *Donner la définition de l'observabilité du système* (1).

3. *En se basant sur la solution de l'équation différentielle de l'équation* (1) , *et en utilisant la définition de l'observabilité des états, établir la démonstration du théorème de Kalman suivant:*

   Theorem 1 *Les états du système* (1) *sont tous observables si et seulement si la matrice d'observabilité O suivante est de rang plein égal à n :*

$$O = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

4. *Etablir la condition sur le gain L permettant de garantir la convergence de l'observateur.*

0.1 Changement de base simplifiant le calcul du gain de l'observateur

Afin de calculer le gain L qui permet de vériier la condition de convergence de l'observateur établie dans la question précédente, l'utilisation des matrices A, B et C du modèle (1) est souvent impossible. Pour remedier à cette difficulté , on utilise une transformation linéaire $z = Tx$ qui trsnforme le (1) en une forme particulière, dite canonique observable, donnée par:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{z}_0 = A_0 z_0 + B_0 u + L_0(y - y_0) \\ y_0 = C_0 z_0 \end{array} \right. \tag{4}$$

avec

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix}; B_0 = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{n-1} \end{bmatrix}; C_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{5}$$

où les a_i sont les coefficients du polynôme caractéristique du système (1) donné par

$$\Delta(s) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + a_{n-2}s^{n-2} + \cdots + a_1 s + a_0$$

Exprimer les matrices A_0, B_0, C_0 et L_0 du modèle (4) en fonction de la matrice de transformation T et des matrices A, B, C et L du modèle(2). Indication: Montrer que

$$\begin{array}{rcl} A_0 & = & TAT^{-1} \\ B_0 & = & TB \\ C_0 & = & CT^{-1} \\ L_0 & = & TL \end{array}$$

0.2 Calcul du gain de l'observateur ($n = 3$)

1. *En posant $T = \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{bmatrix}$; où T_i sont les vecteurs lignes de T, montrer les relations suivantes:*

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -a_0 T_3 & = & T_1 A \\ T_1 - a_1 T_3 & = & T_2 A \\ T_2 - a_2 T_3 & = & T_3 A \end{array} \right.$$

   (a) *Montrer que l'équation $-a_0 T_3 = T_1 A$ est redondante (utliser le théorème de Cayley Hamilton).*

   (b) *Donner l'expression de T_1 et T_2 en fonction de T_3, de A et des corfficients a_i.*

   (c) *En utilisant $C_0 = CT^{-1}$, montrer que $T_3 = C$. Exprimer l'expression générale de la transformation T en fonction de la matrice d'observabilité O et des coefficients a_i du polynôme caractéristique.*

2. *Notons par λ_i^0 les valeurs propres de $(A_0 + L_0 C_0)$ choisies arbitairement dans le demi-plan $\Re(\lambda) < 0$.*

(a) *Montrer les expressions suivantes du gain* $L_0 = \begin{pmatrix} l_1^0 \\ l_2^0 \\ l_3^0 \end{pmatrix}$ *de l'observateur du modèle* (5)

$$\begin{aligned} l_1^0 &= a_0 - \lambda_1\lambda_2\lambda_3 \\ l_2^0 &= a_1 + \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3 \\ l_3^0 &= a_2 - (\lambda_1\lambda_2\lambda_3) \end{aligned}$$

(b) *Déduire l'expression du gain* L *de l'observateur* (2).

0.3 Application numérique

Soit le système de l'équation (1) *où les matrices* A, B *et* C *sont données par*

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} ; B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} ; C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{6}$$

1. *En se basant sur les résultats précédents, calculer le gain* L *de l'observateur* (2) *qui permet d'estimer les états de ce système.*

2. *Confimer les résultats via Matlab et Simulink (joindre un CD contenant les programmes (fichier.m et fichier.mdl, ainsi que les figures obtenues).*