Université Mouloud Mammeri de Tizi Ouzou Faculté des Sciences
Département de Tronc Commun Mathématiques et Informatique
Année Universitaire 2021/2022

Corrigé examen d'algébre1

Variante 1

Exercice n° 1. (6pts)
On considère l'application f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = x^3 - 3x + 2$$

Soient les ensembles

$$A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}, \qquad B = \{2\}.$$

1. Déterminer $f(A)$
2. f est-elle injective, surjective, bijective ? Justifier.
3. Déterminer $f^{-1}(B)$

Corrigé exercice n° 1.

1) Par définition $f(A) = \{y \in \mathbb{R},\ tq\ \exists x \in A,\ y = f(x)\}$

- $0 \in f(A)$ car $\exists\ x = -2$ et $x = 1$ tel que $0 = f(-2) = f(1)$.
- $4 \in f(A)$ car $\exists\ x = -1$ et $x = 2$ tel que $4 = f(-1) = f(2)$. **(1.5 pts)**
- $2 \in f(A)$ car $\exists\ x = 0$ tel que $2 = f(0)$.

$f(A)$ contient t-il d'autres éléments ?
Soit $y \in f(A)$ tel que $y \neq 0$, $y \neq 2$ et $y \neq 4$. Donc $\exists\ x \in A$ tel que $y = f(x)$, donc x possède une deuxième image dans $\mathbb{R}$ contradiction car f est une application.

2 f n 'est pas injective car, $\exists x_1 = -2$ et $x_2 = 1$ tel que $f(x_1) = f(x_2) = 0$. **(1 pts)**

La fonction $f(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$ et comme $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, alors l'equation $y = f(x)$ admet au moins une solution sur $\mathbb{R}$, d'où f est surjective. **(1 pts)**

Conclusion : f n 'est pas bijective. **(1 pts)**

3)

$$\begin{aligned} f^{-1}(B) &= \{x \in \mathbb{R}, / f(x) = 2\} = \{x \in \mathbb{R}, / x^3 - 3x + 2 = 2\} = \{x \in \mathbb{R}, / x^3 - 3x = 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}, / x(x^2 - 1) = 0\} = \{-\sqrt{3},\ 0, \sqrt{3}\}. \end{aligned}$$ **(1.5 pts)**

Exercice n° 2. (8pts)
Sur l'ensemble $\mathbb{R} - \{1\}$ on définit la loi de composition $*$ par :

$$x * y = xy - x - y + 2$$

1) Montrer que $(\mathbb{R} - \{1\},\ *)$ est un groupe commutatif.
2) Montrer que l'application f de $\mathbb{R} - \{1\}$ dans $\mathbb{R}^*$ définie par $1 f(x) = x - 1$ est un isomorphisme de $(\mathbb{R} - \{1\},\ *)$ dans $(\mathbb{R}^*,\ \times)$.

Corrigé exercice n° 2.

1) Montrons que $(\mathbb{R}-\{1\},\ *)$ est un groupe commutatif :

1.a) La loi de composition $*$ est bien une loi interne à $\mathbb{R}-\{1\}$ car : Si x et $y \in \mathbb{R}-\{1\}$, l'équation :

$$(x*y)-1=0 \Longleftrightarrow (xy-x-y+2)-1=0 \Longleftrightarrow (1-x)(1-y)=0$$

n'a pas de solution dans $\mathbb{R}-\{1\}$ d'où $(x*y)\neq 1$.
La loi est donc interne à $\mathbb{R}-\{1\}$. (**1 pts**)

1.b) La loi est commutative car :

$$x*y=xy-x-y+2=yx-y-x+2=y*x. \qquad (\textbf{1 pts})$$

1.c) La loi $*$ est associative car :

$$\begin{aligned}(x*y)*z &= (xy-x-y+2)*z=(xy-x-y+2).z-(xy-x-y+2)-z+2\\ &= xyz-xz-yz+2z-xy+x+y-2-z+2=x+y+z-xy-xz-yz+xyz\\ &\text{et} \qquad (\textbf{1 pts})\\ x*(y*z) &= x*(yz-y-z+2)=x(yz-y-z+2)-x-(yz-y-z+2)+2\\ &= xyz-xy-xz+2x-x-yz+y+z-2+2=x+y+z-xy-xz-yz+xyz.\end{aligned}$$

1.d) L'existence d'un élément neutre :

e est un élément neutre pour $*$ si et seulement si $x*e=e*x=x$ pour tout x dans $\mathbb{R}-\{1\}$. Et comme $*$ est commutative, donc il suffit de résoudre l'équation $x*e=x$ d'inconnu e.

$$\begin{aligned}x*e=x &\Longleftrightarrow xe-x-e+2=x \Longleftrightarrow xe-2x-e+2=0\\ &\Longleftrightarrow e(x-1)-2(x-1)=0 \Longleftrightarrow (x-1)(e-2)=0 \Longrightarrow e=2. \qquad (\textbf{1 pts})\end{aligned}$$

Car $x\neq 1$. Donc $e=2$ est l'element neutre de $*$ dans $\mathbb{R}-\{1\}$.

1.e) l'existence du symétrique de x dans $\mathbb{R}-\{1\}$:

Soit $x\in\mathbb{R}-\{1\}$, x' est le symétrique de x pour $*$ dans $\mathbb{R}-\{1\}$ si si $x*x'=x'*x=e$ pour tout x dans $\mathbb{R}-\{1\}$. Et comme $*$ est commutative, donc il suffit de résoudre l'équation $x*x'=e$ d'inconnu x'.

$$\begin{aligned}x*'x=e &\Longleftrightarrow xx'-x-x'+2=e \Longleftrightarrow xx'-x-x'+2=2 \qquad (\textbf{1 pts})\\ &\Longleftrightarrow xx'-x-x'=0 \Longleftrightarrow x'(x-1)=x \Longleftrightarrow x'=\frac{x}{x-1}\end{aligned}$$

Il reste à vérifier que $x'\neq 1$.
Supposons le contraire, c 'est à dire $x'=1$ donc $\frac{x}{x-1}=1$ ce qui veut dire $x=x-1$ impossible.

Conclusion : $(\mathbb{R}-\{1\},\ *)$ est un groupe abélien.

2) Montrons que f est un isomorphisme :

2.a) Soient $x,\ y\in\mathbb{R}-\{1\}$:

$$f(x*)y=f(xy-x-y+2)=xy-x-y+2-1=xy-x-y+1=(x-1)(y-1)=f(x)f(y)$$

f est donc un morphisme de groupe (**1 pts**)

2.b) Montrons que f est bijective.

f est injective :

Soient $x_1,\ x_2 \in \mathbb{R} - \{1\}$ tel que $f(x_1) = f(x_2)$ ce qui veut dire

$$x_1 - 1 = x_2 - 1 \Longleftrightarrow x_1 = x_2, \qquad \textbf{(1 pts)}$$

d'où f est injective.

f est surjective :

Soit $y \in \mathbb{R}^*$, comme :

$$y = (y+1) - 1$$

donc il existe $x = (y+1) \in \mathbb{R} - \{1\}$ tel que $y = x - 1 = f(x)$, d'où f est surjective (**1 pts**)

Conclusion : f est bien un isomorphisme de groupe.

Exercice n° 3. (6pts)

Soient E et F deux ensembles, f une application dans E dans F et g une application de f dans G.

1) Montrer que si $g \circ f$ est injective et f est surjective, alors g est injective.

2) Montrer que si $g \circ f$ est surjective et g est injective, alors f est surjetive.

Corrigé exercice n° 3.

1) Montrons que l'application g de F dans G est injective.

Soient $x_1^{(F)},\ x_2^{(F)}$ deux éléments de F tel que :

$$g(x_1^{(F)}) = g(x_2^{(F)}), \tag{1}$$

montrons alors que $x_1^{(F)} = x_2^{(F)}$.

Comme f est surjective, donc ils existent $x_1^{(E)}$, $x_2^{(E)}$ dans E tel que

$$\begin{aligned} x_1^{(F)} &= f(x_1^{(E)}) \Longrightarrow g(x_1^{(F)}) = g(f(x_1^{(E)})) = g \circ f(x_1^{(E)}) && (2)\\ &et \\ x_2^{(F)} &= f(x_2^{(E)}) \Longrightarrow g(x_2^{(F)}) = g(f(x_2^{(E)})) = g \circ f(x_2^{(E)}) && (3) \end{aligned}$$

de (1), (2) et (3), on déduit :

$$g \circ f(x_1^{(E)}) = g \circ f(x_2^{(E)})$$

et comme $g \circ f$ est injective, donc : $x_1^{(E)} = x_2^{(E)}$. On déduit

$$f(x_1^{(E)}) = f(x_2^{(E)}) \Longleftrightarrow x_1^{(F)} = x_2^{(F)}$$

d'où g est injective. (**3 pts**)

1) Montrons que l'application f de E dans F est surjective.

Soit $x^{(F)}$ dans F, montrons alors qu'ils existe $x^{(E)}$ dans E tel que $x^{(F)} = f(x^{(E)})$.

Comme $x^{(F)}$ est dans F, donc $g(x^{(F)})$ est dans G. Posons alors

$$x^{(G)} = g(x^{(F)}) \tag{4}$$

L'application $g \circ f$ de E dans G est surjective, donc $x^{(G)}$de G possède un antécédent x^E dans E par $g \circ f$. C 'est-à-dire :

$$g \circ f(x^{(E)}) = x^{(G)} \Longrightarrow g(f(x^{(E)})) = x^{(G)} \tag{5}$$

de (4) et (5), on déduit que

$$g(x^{(F)}) = g(f(x^{(E)}))$$

et comme g est injective donc $x^{(F)} = f(x^{(E)})$ (CQFD)

Conclusion f est surjective. (**3 pts**)

Université Mouloud Mammeri de Tizi Ouzou Faculté des Sciences
Département de Tronc Commun Mathématiques et Informatique
Année Universitaire 2021/2022

Corrigé examen d'algébre1

Variante 2

Exercice n° 4. (6pts)