Département M.I.
Licence L1
Module: Analyse I

Université Mouloud Mammeri
de Tizi-Ouzou
Février 2022

Corrigé du partiel d'analyse (sujet 2)

Notez: Toute réponse non justifiée ne sera pas prise en considération.
Barème: 12pts + 8pts.

Exercice 1: (12 pts). On considère la suite de nombres réels $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par:

$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} : \begin{cases} u_0 = \dfrac{3}{2}, \\ u_{n+1} = (u_n - 1)^2 + 1, n \geq 0, \end{cases}$$

I)

1°)(2pts) <u>On montre que: $1 < u_n < 2, \forall n \in \mathbb{N}$.</u> Pour cela on utilise le raisonnement par récurrence:
a) pour $n = 0$: $u_0 = \frac{3}{2}$ et on a: $1 < \frac{3}{2} < 2$, donc l'initialisation est vérifiée.
b) on suppose que $1 < u_n < 2$, montrons que $1 < u_{n+1} < 2$. On a:

$$\begin{aligned} 1 < u_n < 2 &\Longrightarrow 1 - 1 < u_n - 1 < 2 - 1 \\ &\Longrightarrow 0 < u_n - 1 < 1 \\ &\Longrightarrow 0 < (u_n - 1)^2 < 1^2 \\ &\Longrightarrow 0 + 1 < (u_n - 1)^2 + 1 < 1 + 1 \\ &\Longrightarrow 1 < u_{n+1} < 2, \end{aligned}$$

donc $1 < u_{n+1} < 2$. D'où: $\forall n \in \mathbb{N}, 1 < u_n < 2$.

2°)(2pts) <u>Monotonie de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$</u>. Calculons $u_{n+1} - u_n$:

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n = (u_n - 1)^2 + 1 - u_n &= u_n^2 - 2u_n + 1 + 1 - u_n \\ &= u_n^2 - 3u_n + 2 \\ &= (u_n - 1)(u_n - 2). \end{aligned}$$

On a bien: $1 < u_n < 2 \Longrightarrow (u_n > 1)$ et $(u_n < 2) \Longrightarrow (u_n - 1 > 0)$ et $(u_n - 2 < 0)$. Par conséquent: $(u_n - 1)(u_n - 2) < 0$ et donc $u_{n+1} - u_n < 0$. Donc $(u_n)_n$ est une suite décroissante.

3°)(2pts) <u>Convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$</u>:
a) D'un coté $(u_n)_n$ est décroissante, par ailleurs $(u_n)_n$ est minorée par 1 (car $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 1$), donc $(u_n)_n$ converge vers l ($l = \inf\{u_n, n \in \mathbb{N}\}$).
b) Calcul de l: On a $l = \lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} u_{n+1}$. Donc:

$$\begin{aligned} l = (l-1)^2 + 1 &\Longrightarrow l^2 - 3l + 2 = 0 \\ &\Longrightarrow (l-1)(l-2) = 0 \\ &\Longrightarrow (l = 1) \ ou \ (l = 2). \end{aligned}$$

Déterminons la valeur de l. On a $l = \inf\{u_n, n \in \mathbb{N}\} \Longrightarrow (u_n)_n$ est minorée par l. Donc: $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq l$, en particulier $u_0 \geq l$, c'est à dire $\frac{3}{2} \geq l \Longrightarrow l = 1$.

4°)(2pts) <u>Inf et Sup de A.</u> $A := \{u_n, n \in \mathbb{N}\}$. On a: $\inf A = l \Longrightarrow inf A = 1$. Comme $(u_n)_n$ est décroissante, alors $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq u_0$ où $u_0 = \frac{3}{2}$. De plus $u_0 \in A$, donc $\max A = \frac{3}{2} \Longrightarrow \sup A = \frac{3}{2}$.

II) Soit $(u_n)_n$ une suite qui vérifie $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$|u_{n+2} - u_{n+1}| \leq \frac{1}{3}|u_{n+1} - u_n|. \tag{1}$$

1)(1pt) On montre que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - u_n| \leq \frac{1}{3^n}|u_1 - u_0|$. On utilise le raisonnement par récurrence:

a) $n = 0$, $|u_1 - u_0| \leq \frac{1}{3^0}|u_1 - u_0|$, donc la propriété est vérifiée pour $n = 0$.

b) On suppose que

$$|u_{n+1} - u_n| \leq \frac{1}{3^n}|u_1 - u_0|. \tag{2}$$

On montre que: $|u_{n+2} - u_{n+1}| \leq \frac{1}{3^{n+1}}|u_1 - u_0|$. En multipliant les deux membre de (2) par $\frac{1}{3}$ on trouve $\frac{1}{3}|u_{n+1} - u_n| \leq \frac{1}{3} \times \frac{1}{3^n}|u_1 - u_0|$. En utilisant (1) on conclut que $|u_{n+2} - u_{n+1}| \leq \frac{1}{3^{n+1}}|u_1 - u_0|$. Finalement: $\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - u_n| \leq \frac{1}{3^n}|u_1 - u_0|$.

2)(2.5pts) En déduire que $(u_n)_n$ est de Cauchy. Soit $\epsilon > 0$, cherchons $N \in \mathbb{N}$ tel que: $\forall p, q \in \mathbb{N}$ on ait: $(p \geq N$ et $q \geq N) \Longrightarrow |u_p - u_q| < \epsilon$. Soit $p > q$. En utilisant l'inégalité triangulaire ainsi que le point précédant on trouve:

$$\begin{aligned}
|u_p - u_q| &= |(u_p - u_{p-1}) + (u_{p-1} - u_{p-2}) + ... + (u_{q+1} - u_q)| \\
&\leq |u_p - u_{p-1}| + |u_{p-1} - u_{p-2}| + ... + |u_{q+1} - u_q| \\
&\leq (\frac{1}{3^{p-1}} + \frac{1}{3^{p-2}} + ... + \frac{1}{3^{q+1}} + \frac{1}{3^q})|u_1 - u_0| \\
&\leq \frac{1}{3^q}(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + ... + \frac{1}{3^{p-q-1}})|u_1 - u_0|.
\end{aligned}$$

On a: $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + ... + \frac{1}{3^{p-q-1}} = \frac{1-\frac{1}{3^{p-q}}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}(1 - (\frac{1}{3})^{p-q})$ (c'est la somme de la suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$ et de premier terme 1). Donc: $|u_p - u_q| \leq \frac{1}{3^q}\frac{3}{2}(1 - (\frac{1}{3})^{p-q})|u_1 - u_0| \leq \frac{1}{3^q}\frac{3}{2}|u_1 - u_0|$. On a $\lim_{q\to\infty} \frac{1}{3^q}\frac{3}{2}|u_1 - u_0| = 0$ car $\lim_{q\to\infty} \frac{1}{3^q} = 0$. Donc:

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \text{telque}:\ \forall q \geq N,\ |\frac{1}{3^q}\frac{3}{2}||u_1 - u_0| < \epsilon.$$

Donc, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $p > q > N$ on a $|u_p - u_q| < \epsilon$. Ce qui signifie que $(u_n)_n$ est une suite de Cauchy.

(0.5pt) Conclusion: la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

Exercice 2: (8 pts).

I)

$$f(x) = \begin{cases} |\frac{sin(x)}{x}|, & si\ x \neq 0, \\ 1 & si\ x = 0. \end{cases} \tag{3}$$

et

$$g(x) = \begin{cases} \frac{sin(x)}{|x|}, & si\ x \neq 0, \\ 1 & si\ x = 0. \end{cases} \tag{4}$$

1) La fonction f qui est donnée par (3), est elle continue sur D_f? (0.25pt)$D_f = \mathbb{R}^* \cup \{0\} = \mathbb{R}$.

a)(0.25 pt) Continuité sur $\mathbb{R}^*$ la fonction $x \mapsto \frac{sin(x)}{x}$ est continue (car rapport de deux fonction toutes deux continues sur $\mathbb{R}^*$, de plus la fonction $x \mapsto |x|$ est aussi continue). Donc $x \mapsto |\frac{sin(x)}{x}|$ est aussi continue sur $\mathbb{R}^*$.

b)(1pt) Continuité au point $x_0 = 0$. On a $\lim_{x\to 0} |\frac{sin(x)}{x}| = |\lim_{x\to 0} \frac{sin(x)}{x}| = |1| = 1 = f(0)$. Donc f est continue en 0. Conclusion: f est continue sur $\mathbb{R}$.

2) La fonction g qui est donné par (4), est elle continue sur D_g? (0.25pt)$D_g = \mathbb{R}^* \cup \{0\} = \mathbb{R}$.

a)(0.25pt) Continuité sur $\mathbb{R}^*$. La fonction g est continue car elle est le rapport de deux fonction continue sur $\mathbb{R}^*$. $(x \mapsto sin(x), \quad x \mapsto |x|)$.

b)(1pt) Continuité au point $x_0 = 0$. $\lim_{x\to 0^+} g(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{sin(x)}{|x|} = 1 = g(0) \Longrightarrow g$ est continue à droite de 0.

$\lim_{x\to 0^-} g(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{sin(x)}{|x|} = \lim_{x\to 0} \frac{sin(x)}{-x} = -1 \neq g(0) \Longrightarrow g$ n'est pas continue à gauche de 0, donc g n'est pas continue en 0. Conclusion: g n'est pas continue sur $\mathbb{R}$.

II)(3pts) $h(x) = \frac{\sin(kx)}{\sin(mx)}, k, m \in \mathbb{N}^*$. Est ce que f est prolongeable par continuité en 0?

$$\lim_{x\to 0} h(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(kx)}{\sin(mx)} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{kx\sin(kx)}{kx}}{\frac{mx\sin(mx)}{mx}} = \lim_{x\to 0} \frac{kx}{mx} = \frac{k}{m}.$$

(Remarquez que $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(kx)}{kx} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(mx)}{mx} = 1$ et l'on sait d'autres parts que $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(f(x))}{f(x)} = 1$, avec $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$.) Donc $\lim_{x\to 0} h(x) = \frac{k}{m}$ est finie; par conséquent h est prolongeable par continuité en 0.

III)(2pts) $f(x) = \exp(x) - (x+2)$. On montre qu'il existe au moins un réel c tel que $c \in]0,2[$ et $f(c) = c$. $f(c) = c \Longrightarrow f(c) - c = 0 \Longrightarrow g(c) = 0$ avec $g(x) = f(x) - x$ donc $g(x) = \exp(x) - (x+2) - x = \exp(x) - 2x - 2$. On a g est continue sur $\mathbb{R}$ (car elle est somme des fonctions $x \mapsto e^x$, $x \mapsto -2x - 2$ qui sont continues sur $\mathbb{R}$.)

a) La fonction g est continue sur $\mathbb{R}$ donc g est continue sur $[0,2]$ car $[0,2] \subset \mathbb{R}$.

b) $(g(0) = \exp(0) - 2.0 - 2 = -1 < 0)$ et $(g(2) = \exp(2) - 2.2 - 2 = \exp(2) - 6 > 0)$, ceci implique que $g(0)g(2) < 0$.

Les points a) et b) ci-dessus permettent d'invoquer le théorème des valeurs intermédiaires, ce qui permet de conclure qu'il existe $c \in]0,2[$ et $g(c) = 0$. Mais $g(c) = 0 \Longrightarrow f(c) - c = 0 \Longrightarrow f(c) = c$.

Fin.