TD N° 4 - FLAMBAGE

Exercice 1 :

Soit une colonne tubulaire de longueur L= 1,2m (Dext=40mm, Dint=30mm) sollicitée par une force axiale P. Cette colonne est en matériau de limite élastique Re = 180 MPa et module de Young E= 71000MPa. La colonne est encastrée à une extrémité et articulée à l'autre.
Calculer la charge critique P_{cr} et la contrainte critique σ_{cr}.

Exercice 2 :

Calculer le diamètre d'une tige cylindrique en acier de longueur 1.5 m soumise à une charge axiale de 20 kN. La tige est articulée aux deux extrémités. On prendra un coefficient de sécurité de 5.

Exercice 3 :

Une colonne tubulaire en fonte de 4m de longueur, de 200 mm de diamètre extérieur et de 100 mm de diamètre intérieur est encastrée à la base et libre à son extrémité supérieure. Les caractéristiques de la fonte utilisée sont : limite élastique Re = 150 MPa et module de Young E= 100000 MPa.

Quelle charge peut-on appliquer au sommet de la colonne pour une contrainte admissible du matériau ne dépassant pas 50 N/mm^2 ?

Exercice 4 :

Un piston de machine à vapeur de 400 mm de diamètre et de 1600 mm de longueur de tige est soumis à une pression d'admission de 8 atm. La tige est en acier de limite élastique Re =430 MPa et module de Young E=210000 MPa et on la considère comme encastrée dans le piston et articulée à son autre extrémité.

1- Déterminer le diamètre de la tige du piston pour une sécurité au flambage de 10.
2- Déterminer la contrainte régnant dans la tige.

Exercice 5 :

Une barre pleine en acier de 50 mm de diamètre, articulée aux extrémités est sollicitée en compression axiale. Sachant que Re =250 MPa et E=210000 MPa :

- Déterminer la longueur minimum de la barre vérifiant la formule d'Euler.
- Calculer la charge axiale maximale que peut supporter cette barre. On prend un coefficient de sécurité s=5.

Exercice 6 :

Une poutre en bois de section carrée 200x200 mm^2 et de longueur 4500 mm est articulée à ses deux extrémités. Les caractéristiques mécaniques du bois sont Re =25 MPa et E=100000 MPa.

- Peut-on appliquer la formule d'EULER à l'étude de cette poutre ?
- Quelle est la charge maximale que peut supporter cette poutre ? Le coefficient de sécurité sera pris égal à 2.

TD N° 4 – FLAMBAGE- CORRECTION

Exercice N°1 :

Vérifions d'abord si on peut appliquer la formule d'EULER : Il faut que l'élancement de la colonne soit supérieur ou égal à l'élancement limite d'Euler.

$$\lambda > \lambda_{lim.Euler}$$

- $\lambda_{lim.Euler} = \pi\sqrt{\frac{E}{R_e}} = 62$
- $\lambda = \frac{\alpha L}{i_{gmin}}$,

$i_{gmin} = \sqrt{\frac{I_{min}}{S}} = 12.5\ mm,\ I_{min} = \frac{(d_{ext}^4 - d_{int}^4)}{64} = 85859{,}375 mm^4,\ S = \frac{\pi(d_{ext}^2 - d_{int}^2)}{4} = 550 mm^2$

l=αL Longueur de la colonne =1200 mm, α : coefficient tenant compte du type de liaison des extrémités de la tige, dans notre cas la tige est encastrée à une extrémité et articulée à l'autre α=0.7.

L'élancement de la colonne est $\lambda = 67.2$. La condition. $\lambda > \lambda_{lim.Euler}$ est donc vérifiée.

Puisque elle est vérifiée on peut donc calculer la charge critique par la formule d'EULER

$$P_{crEuler} = \frac{\pi^2 E I_{min}}{0.7^2 L^2} = 85.3\ kN$$

La contrainte critique $\sigma_{cr} = \frac{P_{cr}}{S} = 155 MPa$

Exercice N°2 :

On pose la condition par rapport à la force admissible d'Euler $P_{adm.Euler}$: **$P \leq P_{adm.Euler}$**

$$P_{admEuler} = \frac{R_e S}{s\bar{\lambda}^2} = \frac{\pi^2 E I_{min}}{s l^2}$$

P : effort axial supporté par la tige=20kN

Re : limite élastique du matériau

E : module de Young de l'acier E= 210000 MPa.

S : aire de la section droite de la tige, section circulaire : $S=\pi d^2/4$

s: coefficient de sécurité =5

$\bar{\lambda}$: élancement réduit

Imin : moment d'inertie mini de la section de la tige, section circulaire : $I_{min}=\pi d^4/64$

l : longueur de flambement de la tige

l=αL

- L : longueur de la tige
- α : coefficient tenant compte du type de liaison des extrémités de la tige, dans notre cas la tige est encastrée à ses deux extrémités α=1. l=L= 1500 mm.

La condition de non flambement devient :

$$P \leq P_{admEuler} = \frac{R_e S}{s\bar{\lambda}^2} = \frac{\pi^2 E I_{min}}{sl^2} = \frac{\pi^3 E d^4}{64 s L^2}$$

De cette nouvelle expression on tire le diamètre minimum de non flambement de la tige :

$$d \geq \sqrt[4]{\frac{64\, sP\, L^2}{E\pi^3}} = 38{,}6mm, \text{ on prend d=40 mm}$$

Vérification :

$P_{cr.Euler} = \frac{\pi^2 E I_{min}}{L^2} = 115{,}6\ kN \quad \Rightarrow P_{Cr} \gg P$

$\lambda_{lim.Euler} = \pi\sqrt{\frac{E}{R_e}} = 94,\ \lambda = \frac{L}{i_{gmin}},\ i_{gmin} = \sqrt{\frac{I_{min}}{S}},\ \lambda = 150 \Rightarrow \lambda > \lambda_{lim.Euler}$

Les deux conditions d'application de la théorie d'Euler sont vérifiées.

Exercice N°3 :

On développe le même raisonnement que pour l'exercice 2, il faut juste noter qu'ici on nous demande de déterminer l'effort que peut supporter la colonne sans flamber avec un matériau dont la valeur de la contrainte admissible est imposée ainsi que celle du coefficient de sécurité.

On pose donc la condition de non flambement par rapport à la force admissible d'Euler $P_{adm.Euler}$: $\mathbf{P \leq P_{adm.Euler}}$

$$P \leq P_{admEuler} = \frac{R_e S}{s\bar{\lambda}^2} = \frac{\pi^2 E I_{min}}{sl^2}$$

P : effort axial supporté par la tige à déterminer

Re : limite élastique du matériau = 150 MPa

E : module de Young de la fonte E= 100000 MPa.

S : aire de la section droite de la tige, section circulaire creuse : $S=\pi(dext^2-dint^2)/4$

s: coefficient de sécurité à déterminer

$\bar{\lambda}$: élancement réduit

Imin : moment d'inertie mini de la section de la tige, section circulaire creuse :

$I_{min}=\pi(dext^4-dint^4)/64$, dext=200mm - dint=100mm

l : longueur de flambement de la tige

l=αL

- L : longueur de la tige
- α : coefficient tenant compte du type de liaison des extrémités de la tige, dans notre cas la tige est encastrée à ses deux extrémités α=2. l=2L= 8000 mm.

La condition de non flambement devient :

$$P \leq P_{admEuler} = \frac{R_e S}{s\bar{\lambda}^2} = \frac{\pi^2 E I_{min}}{s l^2} = \frac{\pi^3 E\left(d_{ext}^4 - d_{int}^4\right)}{64 s 4 L^2}$$

De cette nouvelle expression on tire la charge maxi correspondant à une contrainte admissible du matériau :

Le coefficient de sécurité vaut : s=Re/σ_{adm} =150/50= 3

$$P \leq P_{admEuler} = \frac{\pi^3 E\left(d_{ext}^4 - d_{int}^4\right)}{64 x 3 x 4 L^2} = 378\ kN$$

Exercice N°4 :

a- Calcul du diamètre de la tige du piston :

Même démarche que l'exercice N°2.

Condition de non flambement :

$$P \leq P_{admEuler} = \frac{R_e S}{s\bar{\lambda}^2} = \frac{\pi^2 E I_{min}}{s l^2} = \frac{\pi^3 E d^4}{64 s l^2}$$

De cette expression on tire le diamètre minimum de non flambement de la tige :

$$d \geq \sqrt[4]{\frac{64\ sP\ l^2}{E\pi^3}}$$

- l=αL
  - L : longueur de la tige
  - α : coefficient tenant compte du type de liaison des extrémités de la tige, dans notre cas la tige est encastrée à une extrémité et articulée à l'autre α=0.7. l=0.7.1600=1120mm
- P : charge axiale qu'on calcule à partir de la pression d'admission p de 8atm. 1atm=101325Pa

$$P = S.p = \frac{\pi d^2}{4}.p = 101.81 kN$$

$$d \geq \sqrt[4]{\frac{64\ sP\ l^2}{E\pi^3}} = 59{,}6 mm.$$ On prend d=60 mm

b- Contrainte régnant dans la tige :

La contrainte est donnée par :

$$\sigma = \frac{P}{S}\bar{\lambda}^2$$

$\lambda_{lim.Euler} = \pi\sqrt{\frac{E}{R_e}} = 69.4,\ \lambda = \frac{l}{i_{gmin}} = 74.7,\ \Rightarrow \lambda > \lambda_{lim.Euler}$

$\bar{\lambda} = \frac{\lambda}{\lambda_{lim.Euler}} = 1.08$

$$\sigma = \frac{P}{S}\bar{\lambda}^2 = 42.02 \text{ MPa}$$

Exercice N°5 :

a- Longueur minimum de la barre :

On pose la condition de validité de la formule d'EULER sur l'élancement :

$$\lambda \geq \lambda_{lim.Euler}$$

$\lambda_{lim.Euler} = \pi\sqrt{\frac{E}{R_e}}$, $\lambda = \frac{L}{i_{gmin}}$, $i_{gmin} = \sqrt{\frac{I_{min}}{S}}$,

$\lambda_{lim.Euler} = 91$

L= l : poutre bi-articulée, igmin=12.5 mm

$\lambda = \frac{L}{12.5} \geq \lambda_{lim.Euler}$=37.42 ⇒Lmin=12.5$\lambda_{lim.Euler}$=12.5x91= 1138 mm.

Lmini=1138 mm

b- Charge axiale P

$$P = \frac{\pi^2 EI_{min}}{sl^2} = 98.2 \text{ kN}$$

Exercice N°6 :

a- Vérification de l'applicabilité de la formule d'EULER :

$$\lambda \geq \lambda_{lim.Euler} \text{ ?}$$

$\lambda_{lim.Euler} = \pi\sqrt{\frac{E}{R_e}} = 198.5$

$\lambda = \frac{L}{i_{gmin}}$, $i_{gmin} = \sqrt{\frac{I_{min}}{S}} = \sqrt{\frac{\mathrm{b}b^3}{12\, b^2}} = \frac{b}{\sqrt{12}} = \frac{200}{\sqrt{12}}$, $\lambda = \frac{\sqrt{12}x4500}{200}$ =77.94

La condition $\lambda \geq \lambda_{lim.Euler}$ n'est pas vérifiée. **La formule d'Euler ne peut donc pas être utilisée.**

b- Charge maxi admissible ;

Comme la formule d'Euler n'est pas applicable on utilise la formule de RANKINE

$$P_{adm} = \frac{\pi^2 ES}{s\left(\lambda^2_{lim.Euler} + \frac{SL^2}{I_{min}}\right)} = 431.7\ kN$$

Padm= 431.7 kN