

CHARGES CYCLIQUES

I-Généralités :

1-Définition de la fatigue :

Soit un arbre de section circulaire tournant à une vitesse ω :

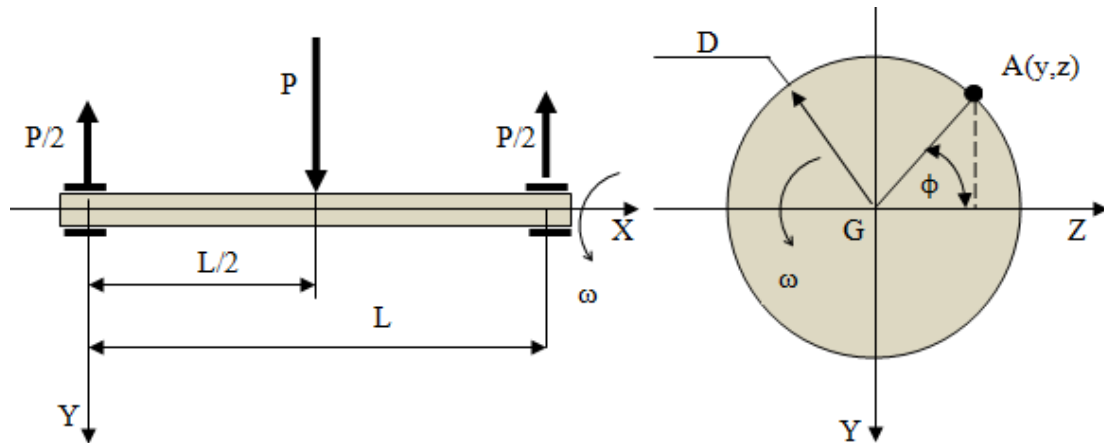


Figure1 : arbre tournant sollicité en flexion.

L'arbre subit des charges variables cycliquement mais d'amplitude constante. La contrainte au point A est :

$$\sigma_A = \frac{M_f}{I_{GZ}} y$$

- M_f : moment fléchissant
- I_{GZ} : moment quadratique de la section droite par rapport à l'axe neutre
- y : position de la fibre matérialisée par le point A par rapport à l'axe neutre

On exprime Y en fonction de D et ω :

$$y = \frac{D}{2} \sin \varphi \text{ avec } \varphi = \omega t$$

$$y = \frac{D}{2} \sin \omega t$$

La contrainte en A s'écrit donc:

$$\sigma_{A(t)} = \frac{M_f}{I_{GZ}} \frac{D}{2} \sin \omega t$$

En posant :

$$\sigma_a = \frac{M_f}{I_{GZ}} \frac{D}{2} : \text{amplitude de contrainte}$$

La contrainte devient :

$$\sigma_{A(t)} = \sigma_a \sin \omega t \quad (1)$$

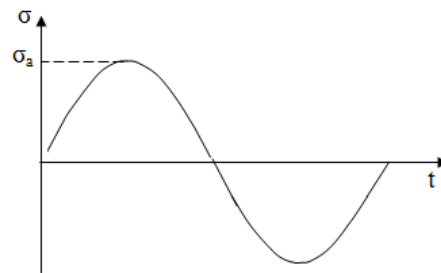


Figure 2 : Variation de la contrainte en fonction du temps.

Le point A représentant une fibre se trouve donc soumis alternativement à la traction et à la compression. Il a été constaté que :

- Sous des contraintes variables une pièce peut se rompre après un certain nombre de cycles alors qu'elle ne rompt pas lorsqu'elle subit la même contrainte constante dans le temps. Ce phénomène est appelé fatigue.
- Le nombre de cycles jusqu'à la rupture dépend de l'amplitude de la contrainte :

$$\sigma_a \uparrow \implies N \downarrow \text{ et inversement}$$

Où : σ_a : Amplitude de contrainte et N : Nombre de cycles à rupture

- Pour de faibles amplitudes de contraintes la pièce peut théoriquement travailler indéfiniment.

2- Les cycles et leurs caractéristiques:

a- Types de cycles :

- Contraintes alternées :

- Cycle symétrique

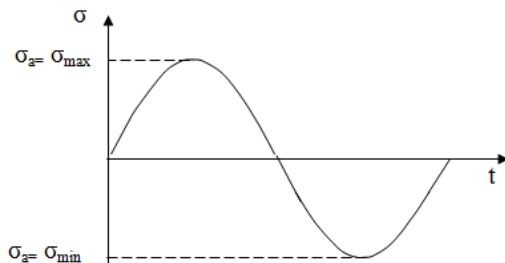


Figure 3 : Cycle symétrique.

$$\begin{aligned} |\sigma_{max}| &= |\sigma_{min}| \\ \sigma_m &= 0 \\ \sigma_a &= \sigma_{max} \end{aligned}$$

- Cycle asymétrique

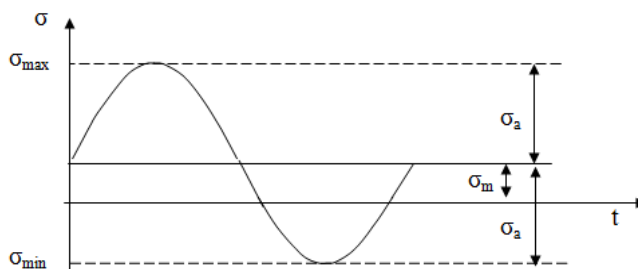


Figure 4 : Cycle asymétrique.

$$\begin{cases} \sigma_{max} > 0 \\ \sigma_{min} < 0 \\ \sigma_m > 0 \end{cases}$$

$$\sigma_{max} = \sigma_m + \sigma_a$$

- Contraintes répétées : Cycle asymétrique

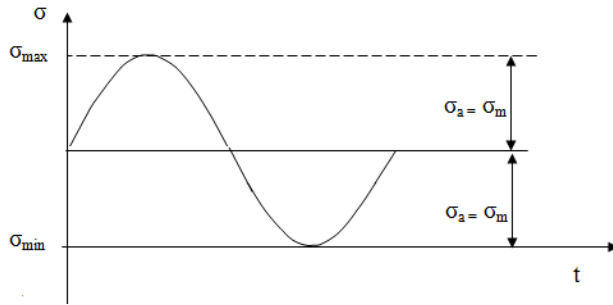


Figure 5 : Cycle répété.

$$\begin{cases} \sigma_{max} > 0 \\ \sigma_{mini} = 0 \\ \sigma_m > 0 \end{cases}$$

$$\sigma_{max} = \sigma_m + \sigma_a$$

$$\sigma_a = \sigma_m = \frac{\sigma_{max}}{2}$$

- Contraintes ondulatoires : Cycle asymétrique

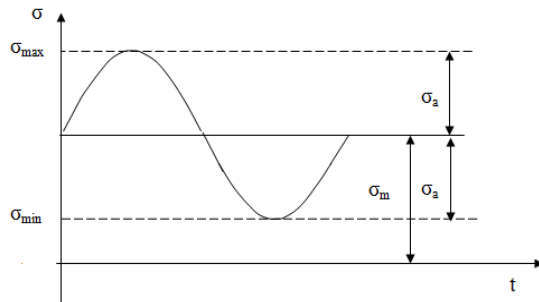


Figure 6 : Cycle ondulé.

$$\begin{cases} \sigma_{max} > 0 \\ \sigma_{mini} > 0 \\ \sigma_m > 0 \end{cases}$$

$$\sigma_{max} = \sigma_m + \sigma_a$$

Remarque : Le cycle peut être considéré comme la superposition d'une contrainte constante σ_m et d'une contrainte variable σ_a .

b- Caractéristiques d'un cycle :

Un cycle est caractérisé par :

- Le coefficient d'asymétrie r :

$$r = \frac{\sigma_{mini}}{\sigma_{maxi}} \quad (2)$$

Remarque:

$$\begin{cases} r = -1, \text{ cycle symétrique} \\ r \neq -1, \text{ cycle asymétrique} \\ r = 0, \text{ cycle répété} \end{cases}$$

- 2 cycles ayant le même coefficient d'asymétrie sont dits semblables.

- L'amplitude de contrainte σ_a :

$$\sigma_a = \frac{\sigma_{maxi} - \sigma_{mini}}{2} \quad (3)$$

- La contrainte moyenne σ_m :

$$\sigma_m = \frac{\sigma_{maxi} + \sigma_{mini}}{2} \quad (4)$$

II- Diagramme de fatigue – Limite d’endurance :

1- Diagramme de WÖHLER :

C’est la courbe qui donne le nombre de cycles en fonction de la contrainte : $N = f(\sigma)$. Elle délimite le domaine de non rupture du domaine de la rupture.

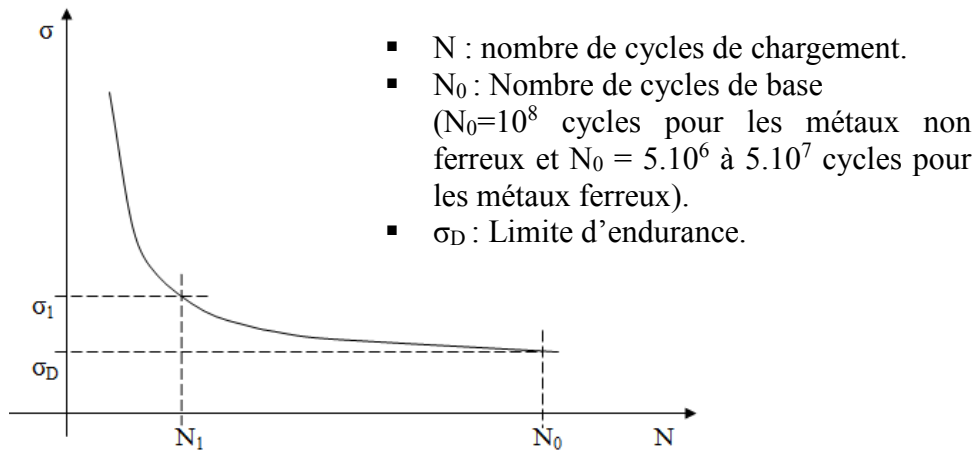


Figure 7 : Allure de la courbe de Wöhler.

La limite d’endurance est la contrainte maxi que peut supporter une pièce sans se rompre. Théoriquement si on charge la pièce à un niveau de contrainte inférieur à la limite d’endurance elle ne se rompra jamais.

Pratiquement, la limite d’endurance est déterminée pour un nombre de cycles de base N_0 . Elle est alors appelée limite d’endurance conventionnelle.

Comme les valeurs de N sont très élevées, on prend le diagramme de WÖHLER dans le système de coordonnées logarithmiques.

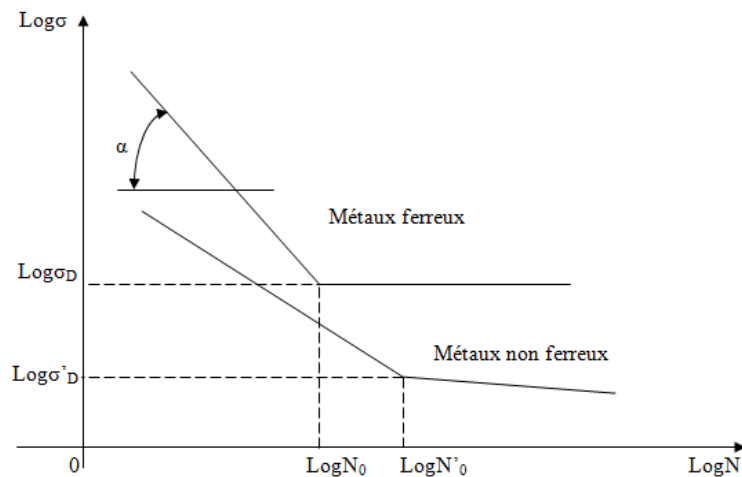


Figure 8 : Courbe de Wöhler en coordonnées logarithmiques.

➤ Pour les métaux ferreux le diagramme présente une asymptote horizontale:

$$\sigma \leq \sigma_D \rightarrow \text{pas de rupture}$$

➤ Pour les métaux non ferreux le diagramme ne présente pas d’asymptote horizontale, la rupture est inévitable.

$\text{Log} N = \text{Log} A - m \text{Log} \sigma$: Équation de la courbe de Wöhler en coordonnées logarithmiques

$$\text{avec } m = \frac{1}{\text{tg} \alpha} \text{ et } A = \text{constante}$$

$\sigma^m N = \sigma_D^m N_0 = \sigma_i^m N_i = A = cste$: équation de la courbe de Wöhler

Pour un nombre de cycles donné, on calcule la contrainte σ :

$$\sigma = \sigma_D \left(\frac{N_0}{N} \right)^{\frac{1}{m}} \quad (5)$$

En posant $K_c = \left(\frac{N_0}{N} \right)^{\frac{1}{m}}$ coefficient du nombre de cycles, la contrainte s'écrit :

$$\sigma = K_c \sigma_D$$

Pour une contrainte donnée, on calcule le nombre de cycles N:

$$N = N_0 \left(\frac{\sigma_D}{\sigma} \right)^m \quad (6)$$

N.B :

- A titre indicatif, on prend $m=6$ à 12 dans le cas de la traction et la compression et $m=9$ à 12 dans le cas de la flexion.
- Pour les matériaux fragiles on prend les plus grandes valeurs de m tandis que pour les matériaux ductiles on prend les plus faibles.

2- Diagramme des amplitudes limites – Diagramme de HAIGH

Ce diagramme est construit dans le système de coordonnées $(\sigma_a - \sigma_b)$.

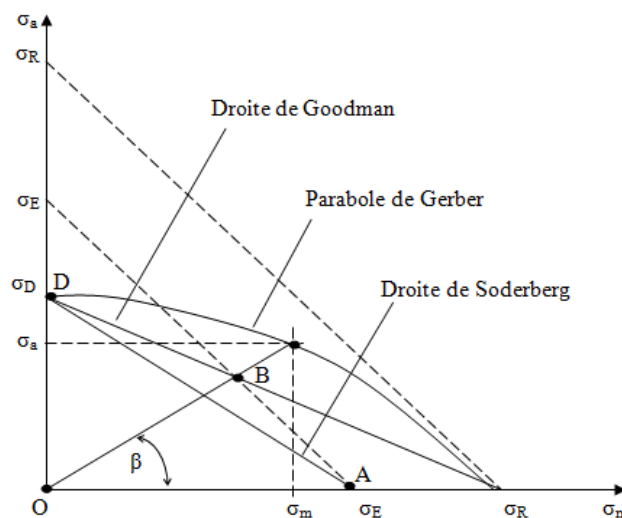


Figure 9 : Diagramme de Haigh

- La parabole de Gerber d'équation $\sigma_a = \sigma_D \left(1 - \frac{\sigma_m^2}{\sigma_R^2} \right)$ délimite le domaine de non rupture du domaine de rupture par fatigue.
- La droite de Goodman d'équation $\sigma_a = \sigma_D \left(1 - \frac{\sigma_m}{\sigma_R} \right)$ délimite un domaine de non rupture par fatigue avec une sécurité plus grande qu'avec la parabole de Gerber.
- La droite de Soderberg d'équation $\sigma_a = \sigma_D \left(1 - \frac{\sigma_m}{\sigma_E} \right)$ délimite un domaine de non rupture par fatigue, de plus elle exclut toute déformation plastique.

Remarque :

- ✓ Tout point dans le diagramme est positionné par l'angle β tel que $tg\beta = \frac{1-r}{1+r}$ (7)
- ✓ Il est recommandé de travailler dans le domaine ABDO.

3- Détermination de la limite d'endurance

La limite d'endurance est déterminée expérimentalement pour chaque matériau. Cependant, on peut utiliser les relations approchées la liant à la résistance à la rupture suivantes :

$$\text{Acier : } \begin{cases} \sigma_{Dflexion} = 0.45 \sigma_R \\ \sigma_{Dftraction} = 0.7 \sigma_{Dflexion} \\ \tau_{DTorsion} = 0.6 \sigma_{Dflexion} \end{cases}$$

$$\text{Fonte : } \begin{cases} \sigma_{Dflexion} = (0.4 \text{ à } 0.5) \sigma_R \\ \tau_{DTorsion} = (0.7 \text{ à } 0.9) \sigma_{Dflexion} \end{cases}$$

$$\text{Métaux non ferreux : } \sigma_{Dflexion} = (0.25 \text{ à } 0.5) \sigma_R$$

NB : Ces relations sont à utiliser avec précautions car elles sont établies pour certains matériaux dans des conditions d'essai bien définies.

4- Principaux paramètres influant sur la limite d'endurance :

a- Concentrateurs de contraintes :

La concentration de contraintes est un accroissement local des contraintes auprès d'un changement brusque de la forme de la section droite d'une pièce. On tient compte de ce fait par le coefficient effectif de concentration des contraintes K_σ et K_τ .

$$\begin{aligned} K_\sigma &= 1 + q(\alpha_\sigma - 1) \\ K_\tau &= 1 + q(\alpha_\tau - 1) \end{aligned} \quad (8)$$

- ✓ q : coefficient de sensibilité du matériau aux concentrations de contraintes sous charges cycliques.

$q = 0.6$ à 0.8 pour les aciers non alliés.

$q = 0.9$ à 1 pour les aciers alliés.

$q = 0$ pour les fontes

- ✓ α_σ ou α_τ : coefficients théoriques de concentration de contraintes ou coefficient de forme. Il caractérise la répartition des contraintes élastiques dans une pièce et dépend de la forme de la pièce, des dimensions du concentrateur et du mode de chargement.

$$\alpha_\sigma = \frac{\sigma_{maxi}}{\sigma_{nom}}; \quad \alpha_\tau = \frac{\tau_{maxi}}{\tau_{nom}}$$

σ_{nom}, τ_{nom} : Contrainte nominale ne tenant pas compte des concentrateurs de contraintes.

K_σ et K_τ peuvent s'écrire : $K_\sigma = \frac{\sigma_D}{\sigma_D^P}, K_\tau = \frac{\tau_D}{\tau_D^P}$

σ_D, τ_D : limite d'endurance du matériau (éprouvette standard)

σ_D^P, τ_D^P : limite d'endurance de la pièce réelle avec ses concentrateurs de contraintes.

Les valeurs de K_σ et K_τ sont données dans des tableaux (Tableaux 1 à 6) ou des abaques.

b- Facteur d'échelle:

Le facteur d'échelle tient compte de l'influence des dimensions de la pièce sur la limite d'endurance.

$$\varepsilon_\sigma = \frac{\sigma_D^P}{\sigma_D} < 1, \quad \varepsilon_\tau = \frac{\tau_D^P}{\tau_D} < 1$$

σ_D, τ_D : limite d'endurance du matériau (éprouvette standard)

σ_D^P, τ_D^P : limite d'endurance de la pièce réelle.

Les valeurs de ε_σ et ε_τ sont données dans des tableaux (Tableaux 7 et 8) ou des abaques.

c- Facteur technologique :

Le facteur technologique (β) tient compte de l'état géométrique de la surface après usinage (β_s) de l'effet des traitements superficiels des surfaces (β_{ts}).

$$\beta = \beta_s \cdot \beta_{ts} \quad (9)$$

β_s : coefficient tenant compte de la qualité de la surface

β_{ts} : coefficient tenant compte des traitements superficiels.

$$\beta_s = \frac{\sigma_D}{\sigma_D^P}, \quad \beta_s = \frac{\tau_D}{\tau_D^P} \quad \text{et} \quad \beta_{ts} = \frac{\sigma_D}{\sigma_D^P}, \quad \beta_{ts} = \frac{\tau_D}{\tau_D^P}$$

σ_D, τ_D : limite d'endurance du matériau (éprouvette standard rectifiée et n'ayant subi aucun traitement de surface)

σ_D^P, τ_D^P : limite d'endurance de la pièce réelle.

Les valeurs de β_s et de β_{ts} sont données respectivement dans les tableaux 9 et 10.

d- Limite d'endurance d'une pièce réelle:

L'influence des différents paramètres sur la limite d'endurance est exprimée par le facteur global λ_σ ou λ_τ :

$$\lambda_\sigma = \frac{K_\sigma}{\varepsilon_\sigma \cdot \beta}, \quad \lambda_\tau = \frac{K_\tau}{\varepsilon_\tau \cdot \beta} \quad (10)$$

La limite d'endurance d'une pièce réelle s'écrit donc :

$$\sigma_D^P = \frac{\sigma_D}{\lambda_\sigma}, \quad \tau_D^P = \frac{\tau_D}{\lambda_\tau} \quad (11)$$

III- Contrainte admissible- Coefficient de sécurité :**1- Contrainte admissible :****a- Définition :**

La contrainte admissible est définie par le rapport entre la contrainte limite et le coefficient de sécurité admissible.

$$[\sigma] = \frac{\sigma_{limite}}{[n]} \quad (12)$$

➤ $[\sigma]$: Contrainte admissible.

➤ σ_{limite} : Contrainte limite.

$\sigma_{limite} = \sigma_E$: pour les matériaux ductiles sous charges statiques.

$\sigma_{limite} = \sigma_R$: pour les matériaux fragiles sous charges statiques.

$\sigma_{limite} = \sigma_D$: pour tous les matériaux sous charges cycliques.

➤ $[n]$: Coefficient de sécurité admissible.

b- Contrainte admissible lors des chargements cycliques :**b1- Cas des cycles symétriques :**

$$[\sigma] = \frac{\sigma_D}{[n]}, \quad [\tau] = \frac{\tau_D}{[n]} \quad (13)$$

Remarque : pour une pièce donnée il faut considérer sa limite d'endurance pondérée σ_D^P ou τ_D^P . La contrainte admissible s'écrit donc :

$$[\sigma]^P = \frac{\sigma_D^P}{[n]}, \quad [\tau]^P = \frac{\tau_D^P}{[n]} \quad (14)$$

b2- Cas des cycles asymétriques :

➔ **Limite d'endurance dans le cas des cycles asymétriques:**

Soit un point A (σ_a, σ_m) sur la droite de Goodman du diagramme des amplitudes limite de Haigh. L'équation de la droite de Goodman: $\sigma_a = \sigma_D \left(1 - \frac{\sigma_m}{\sigma_R}\right)$ peut s'écrire : $\frac{\sigma_a}{\sigma_D} + \frac{\sigma_m}{\sigma_R} = 1$

avec $r = \frac{\sigma_{mini}}{\sigma_{maxi}}$, $\sigma_{max} = \sigma_m + \sigma_a$, $\sigma_{min} = \sigma_m - \sigma_a$, on obtient :

$$\sigma_a = \frac{\sigma_{max}}{2}(1 - r) \quad \text{et} \quad \sigma_m = \frac{\sigma_{max}}{2}(1 + r)$$

On remplace σ_m et σ_a dans l'équation de la droite de Goodman et on détermine la contrainte maxi au point A.

$$\sigma_{Amax} = \frac{2\sigma_D\sigma_R}{\sigma_R(1-r)+\sigma_D(1+r)}$$

Cette contrainte est égale à la limite d'endurance en cycle asymétrique de coefficient 'r'. On l'écrit :

$$\sigma_r = \frac{2\sigma_D\sigma_R}{\sigma_R(1-r)+\sigma_D(1+r)}, \quad \tau_r = \frac{2\tau_D\tau_R}{\tau_R(1-r)+\tau_D(1+r)} \quad (15)$$

Pour une pièce donnée il faut considérer sa limite d'endurance, en cycle symétrique, pondérée σ_D^P ou τ_D^P . La limite d'endurance en cycle asymétrique s'écrit donc :

$$\sigma_r^P = \frac{2\sigma_D\sigma_R}{\lambda_\sigma \sigma_R(1-r)+\sigma_D(1+r)}, \quad \tau_r^P = \frac{2\tau_D\tau_R}{\lambda_\tau \tau_R(1-r)+\tau_D(1+r)} \quad (16)$$

➔ **Contrainte admissible :**

La contrainte admissible s'écrit :

$$\begin{cases} [\sigma]_r = \frac{\sigma_r}{[n]}, [\tau]_r = \frac{\tau_r}{[n]} \\ [\sigma]_r^P = \frac{\sigma_r^P}{[n]}, [\tau]_r^P = \frac{\tau_r^P}{[n]} \end{cases} \quad (17)$$

Pour $N < N_0$: $\begin{cases} \sigma_{r,N} = \sigma_r K_C, \tau_{r,N} = \tau_r K_C \\ \sigma_{r,N}^P = \sigma_r^P K_C, \tau_{r,N}^P = \tau_r^P K_C \end{cases}$

$$\begin{cases} [\sigma]_{r,N} = \frac{\sigma_{r,N}}{[n]}, [\tau]_{r,N} = \frac{\tau_{r,N}}{[n]} \\ [\sigma]_{r,N}^P = \frac{\sigma_{r,N}^P}{[n]}, \tau_{r,N}^P = \frac{\tau_{r,N}^P}{[n]} \end{cases} \quad (18)$$

2- Coefficient de Sécurité :

a- Définition

a1- Charges statiques :

$$n = \frac{\sigma_{lim}}{\sigma_{max}} \quad n = \frac{\tau_{lim}}{\tau_{max}}$$

a2- Charges cycliques :

▪ Cycle symétrique : $n = \frac{\sigma_D}{\sigma_a} \quad n = \frac{\tau_D}{\tau_a} \quad (19)$

▪ Cycle asymétrique : $n = \frac{\sigma_r}{\sigma_{max}} \quad n = \frac{\tau_r}{\tau_{max}} \quad (20)$

Le coefficient de sécurité tient compte des dispersions des caractéristiques mécaniques du matériau, des surcharges accidentelles éventuelles pendant l'exploitation ou le transport ...

b- Coefficient de sécurité lors des sollicitations cycliques composées (σ et τ) :

On utilise la même condition de résistance que lors des charges statiques : $\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma]$

$$\text{Avec } \begin{cases} [\tau] = \frac{1}{2}[\sigma] \\ [\sigma] \equiv [\sigma]_r = \frac{\sigma_r}{[n]}, [\tau] \equiv [\tau]_r = \frac{\tau_r}{[n]}, \text{ on aura : } \begin{cases} \frac{\sigma^2}{[\sigma]^2} + \frac{4\tau^2}{[\sigma]^2} \leq 1 \\ \frac{\sigma^2}{\sigma_r^2} [n]^2 + \frac{4\tau^2}{\sigma_r^2} [n]^2 \leq 1 \\ \frac{\sigma^2}{\sigma_r^2} [n]^2 + \frac{\tau^2}{\tau_r^2} [n]^2 \leq 1 \end{cases} \\ \frac{\sigma_r}{[n]} = \frac{2\tau_r}{[n]}, \sigma_r = 2\tau_r \end{cases}$$

Désignons par :

$\frac{\sigma_r}{\sigma} = n_\sigma$: Coefficient de sécurité ne tenant pas compte des contraintes tangentielles.

$\frac{\tau_r}{\tau} = n_\tau$: Coefficient de sécurité ne tenant pas compte des contraintes normales.

$$\text{On obtient : } \frac{[n]^2}{n_\sigma^2} + \frac{[n]^2}{n_\tau^2} \leq 1$$

$$\text{D'où le coefficient de sécurité admissible : } [n] = \frac{n_\sigma n_\tau}{\sqrt{n_\sigma^2 + n_\tau^2}} \quad (21)$$

La condition de résistance s'écrit :

$$n = \frac{n_\sigma n_\tau}{\sqrt{n_\sigma^2 + n_\tau^2}} \geq [n] \quad (22)$$

c- Coefficient de sécurité lors des charges cycliques simples - calcul de n_σ et n_τ :

$$n_\sigma = \frac{\sigma_r^p}{\sigma_{max}}, \quad n_\tau = \frac{\tau_r^p}{\tau_{max}}$$

σ_r^p et τ_r^p sont les limites d'endurance qui s'écrivent:

$$\sigma_r^p = \frac{2\sigma_D\sigma_R}{\lambda_\sigma\sigma_R(1-r)+\sigma_D(1+r)} \quad \text{et} \quad \tau_r^p = \frac{2\tau_D\tau_R}{\lambda_\tau\tau_R(1-r)+\tau_D(1+r)}$$

$$n_\sigma \text{ s'écrit: } n_\sigma = \frac{2\sigma_D\sigma_R}{\lambda_\sigma\sigma_R(1-r)+\sigma_D(1+r)} \times \frac{1}{\sigma_{max}}. \text{ Avec: } \sigma_{max} = \sigma_m + \sigma_a, \sigma_{min} = \sigma_m - \sigma_a, \frac{\sigma_a}{\sigma_m} = \frac{1-r}{1+r}$$

les coefficients de sécurité sont alors:

$$\begin{cases} n_\sigma = \frac{\sigma_D\sigma_R}{\lambda_\sigma\sigma_R\sigma_a + \sigma_D\sigma_m} \\ n_\tau = \frac{\tau_D\tau_R}{\lambda_\tau\tau_R\tau_a + \tau_D\tau_m} \end{cases} \quad (23)$$

$$\text{Pour } N < N_0 : \begin{cases} n_\sigma = \frac{\sigma_D K_c}{\lambda_\sigma\sigma_a + \sigma_m\frac{\sigma_D}{\sigma_R}} \\ n_\tau = \frac{\tau_D K_c}{\lambda_\tau\tau_a + \tau_m\frac{\tau_D}{\tau_R}} \end{cases} \quad (24)$$

Avec $K_c = \left(\frac{N_0}{N}\right)^{\frac{1}{m}}$ coefficient du nombre de cycles.

d- Choix de $[n]$ - Valeurs recommandées :

$[n] = 1,3$ à 3 pour les pièces laminées en acier

$[n] = 2$ à 4 pour les pièces moulées en acier

$[n] = 4$ à 9 pour les pièces en fonte

Remarque:

- les plus petites valeurs de $[n]$ sont réservées pour les matériaux à caractéristiques mécaniques soigneusement contrôlées
- les plus grandes valeurs de $[n]$ sont prises pour les pièces de sécurité.
- Pour les pièces de faible longévité et de poids minimum exigé on prend $[n] = 1,15$ à $1,5$.

VI- Calcul de la longévité d'une pièce :

1- Longévité en chargement à amplitude de contrainte constante :

A partir de l'équation de la courbe de Wöhler, on détermine la durée de vie (nombre de cycle à rupture N).

a- Cycle Symétrique :

$$\sigma_N^m = \sigma_D^m N_0 \Rightarrow N = \left(\frac{\sigma_D}{\sigma} \right)^m N_0 \quad (25)$$

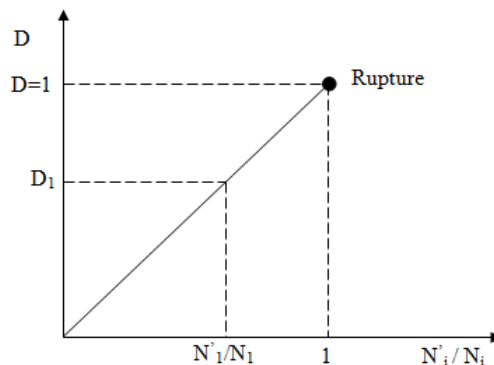
b- Cycle asymétrique :

$$\sigma^m N = \sigma_r^m N_0 \Rightarrow N = \left(\frac{\sigma_r}{\sigma} \right)^m N_0 \quad (26)$$

2- Longévité en chargement à amplitude de contrainte variable :

a -Loi de Miner :

Cette loi repose sur l'hypothèse de la linéarité du dommage. L'application de N'_i cycles à un niveau de contrainte σ_i , pour lequel le nombre moyen de cycle à la rupture est N_i , entraîne un accroissement du dommage égal à N'_i / N_i et la rupture intervient quand $\sum N'_i / N_i = 1$



Si une fraction de la durée de vie d'une pièce $\frac{N'_1}{N_1} = D_1$ est accomplie à un niveau de contrainte σ_1 , la

longévité restante à un autre un niveau de contrainte σ_2 est : $\frac{N'_2}{N_2} = 1 - D_1$

b - Reserve de longévité :

Si $\sum N'_i / N_i = K < 1$, la pièce a une réserve de longévité $R_N = \frac{1}{K}$

c- Nombre de cycle équivalent -Contrainte équivalente:

Pour effectuer le calcul de résistance il faut déterminer une contrainte équivalente, à laquelle correspond un nombre de cycles équivalent, sous l'action de laquelle la pièce subit le même dommage que sous l'action de toutes les charges appliquées successivement durant leurs nombres de cycles respectifs.

Soit l'équation de la courbe de Wöhler : $\sigma_1^m N_i = \sigma_{eq}^m N_{eq} = (\sigma_r^p)^m N_0 = A$

$$\text{Donc : } N_i = N_{eq} \left(\frac{\sigma_{eq}}{\sigma_i} \right)^m$$

$$\text{Avec la loi de Miner : } \frac{N'_1}{N_1} + \frac{N'_2}{N_2} + \dots + \frac{N'_n}{N_n} = 1$$

Où :

N_i : Nombre moyen de cycles à la rupture correspondant aux contraintes σ_i

N'_i : Nombre de cycles durant lesquels s'exercent les contraintes σ_i .

On a :

$$\begin{aligned} \frac{N'_1}{N_{eq} \left(\frac{\sigma_{eq}}{\sigma_1} \right)^m} + \frac{N'_2}{N_{eq} \left(\frac{\sigma_{eq}}{\sigma_2} \right)^m} + \dots + \frac{N'_n}{N_{eq} \left(\frac{\sigma_{eq}}{\sigma_n} \right)^m} &= 1 \\ N'_1 \sigma_1^m + N'_2 \sigma_2^m + \dots + N'_n \sigma_n^m &= N_{eq} (\sigma_{eq})^m \\ N_{eq} &= N'_1 \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_{eq}} \right)^m + N'_2 \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_{eq}} \right)^m + \dots + N'_n \left(\frac{\sigma_n}{\sigma_{eq}} \right)^m \\ N_{eq} &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{\sigma_i}{\sigma_{eq}} \right)^m N'_i \end{aligned} \quad (27)$$

Remarque:

→ Les contraintes sont souvent proportionnelles aux charges appliquées ($\sigma \equiv F$, $\tau \equiv M$).

$$N_{eq} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{F_i}{F_{eq}} \right)^m N'_i, \quad N_{eq} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{M_i}{M_{eq}} \right)^m N'_i \quad (28)$$

→ Le coefficient du nombre de cycles K_c s'écrit : $K_c = \frac{\sigma_{eq}}{\sigma_r} = \left(\frac{N_0}{N_{eq}} \right)^{\frac{1}{m}}$ (29)

3- Ordre de calcul

a- Calcul de dimensionnement

On donne :

$$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \dots, \sigma_n \text{ et } N'_1, N'_2, N'_3, \dots, N'_n \\ \sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3 \dots > \sigma_n \text{ et } N'_1 < N'_2 < N'_3 < \dots < N'_n$$

- Calculer N_{eq} et K_c avec σ_{eq} correspondant à $\sigma_{i \max}$:

On suppose que la rupture intervient au bout d'un nombre de cycles égal à N_{eq} sous une contrainte $\sigma_{eq} = \sigma_{i \max} = \sigma_1$

$$N_{eq} = N'_1 + \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1} \right)^m N'_2 + \left(\frac{\sigma_3}{\sigma_1} \right)^m N'_3 + \dots + \left(\frac{\sigma_n}{\sigma_1} \right)^m N'_n$$

- Calculer la contrainte admissible : $[\sigma]^p = \frac{\sigma_{lim}}{[n]}$
- Déterminer les dimensions de la pièce après avoir posé la condition de résistance $\sigma_{max} \leq [\sigma]^p$

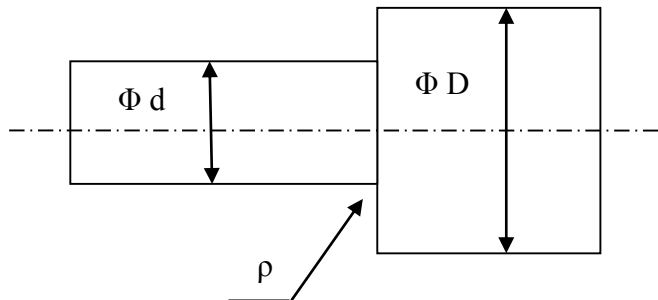
b- Calcul de vérification :

- Calculer N_{eq} et K_C
- Calculer le coefficient de sécurité n
- Vérifier la condition de résistance $n \geq [n]$
- Calculer éventuellement la réserve de longévité R_N : $R_N = \frac{N_{lim}}{N_{eq}} \geq [R_N]$

FACTEURS INFLUANT SUR LA LIMITE D'ENDURANCE

1- Coefficient effectif de concentration de contraintes (K_σ , K_τ)

a- Arbre étagé



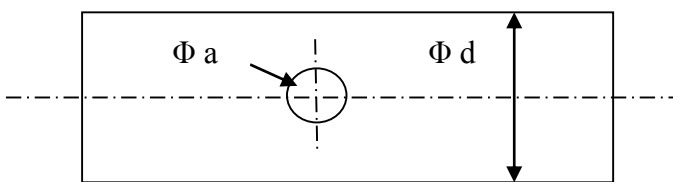
$$\sigma_{nom.flex.} = \frac{M_f}{0.1d^3},$$

$$\tau_{nom.tors.} = \frac{M_t}{0.2d^3}$$

Tableau 1

D/d	ρ/d	K_σ (Flexion)		K_τ (Torsion)	
		$\sigma_R \leq 500$ N/mm ²	$\sigma_R \leq 1200$ N/mm ²	$\sigma_R \leq 500$ N/mm ²	$\sigma_R \leq 1200$ N/mm ²
1 ≤ D/d ≤ 1.2	0.02	2.2	3.0	1.6	1.8
	0.05	1.8	1.9	1.4	1.5
	0.10	1.5	1.6	1.2	1.3
	0.15	1.3	1.4	1.1	1.2
	0.20	1.2	1.3	1.1	1.2
1.2 < D/d ≤ 2	0.02	2.4	3.5	1.8	2.1
	0.05	2.0	2.2	1.5	1.7
	0.10	1.6	1.7	1.3	1.4
	0.15	1.4	1.5	1.2	1.3
	0.20	1.3	1.4	1.1	1.2

b- Arbre avec trou latéral



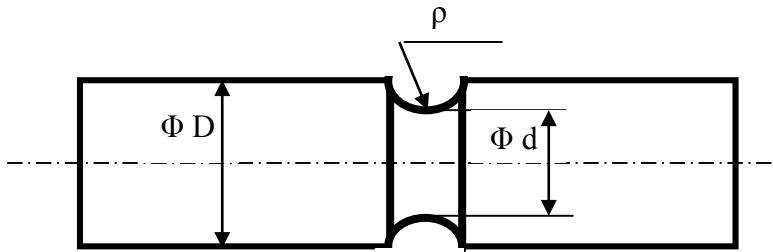
$$\sigma_{nom.flex.} = \frac{M_f}{0.1(1 - 1.5\frac{a}{d})d^3}$$

$$\tau_{nom.tors.} = \frac{M_t}{0.2(1 - \frac{a}{d})d^3}$$

Tableau 2

a/d	K_σ (Flexion)		K_τ (Torsion)	
	$\sigma_R \leq 500$ N/mm ²	$\sigma_R \leq 1200$ N/mm ²	$\sigma_R \leq 500$ N/mm ²	$\sigma_R \leq 1200$ N/mm ²
0.05	2.2	2.5	1.8	2.0
0.10	1.9	2.3	1.8	2.0
0.15	1.7	2.0	1.8	2.0

c- Arbre avec congé



$$\sigma_{nom.flex.} = \frac{M_f}{0.1d^3}$$

$$\tau_{nom.tors.} = \frac{M_t}{0.2d^3}$$

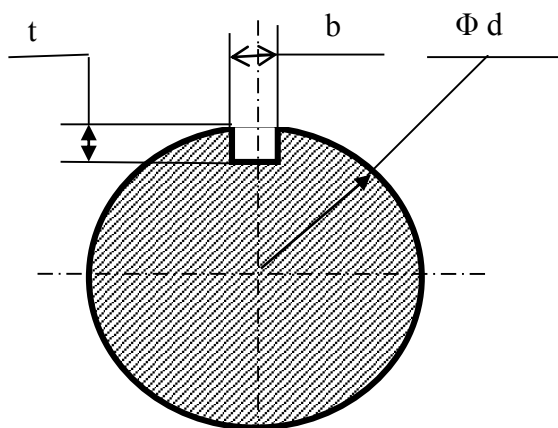
Tableau3

D/d	ρ / d	K _σ (Flexion)		K _τ (Torsion)	
		σ _R ≤ 500 N /mm ²	σ _R ≤ 1200 N /mm ²	σ _R ≤ 500 N /mm ²	σ _R ≤ 1200 N /mm ²
1 ≤ D/d ≤ 1.2	0.02	1.9	2.3	1.4	1.6
	0.05	1.8	2.1	1.3	1.5
	0.10	1.6	1.8	1.2	1.4
	0.15	1.5	1.7	1.2	1.3
1.2 < D/d ≤ 2	0.02	1.9	2.4	1.5	1.7
	0.05	1.8	2.2	1.4	1.6
	0.10	1.7	1.9	1.3	1.5
	0.15	1.6	1.7	1.2	1.4

Remarque :

- Pour les pièces filetées, on prend **K_σ** = 4 à 5 pour les fonds de filets arrondis et **K_σ** = 5 à 6 pour les fonds de filets non arrondis.
- Pour les vis sans fin, on prend **K_σ** = 2.3 à 2.5 et **K_τ** = 1.7 à 1.9.
- Les plus grandes valeurs de **K_σ** et **K_τ** sont réservées pour les vis sans fin en acier allié ou acier au carbone trempé.

d- Arbre avec rainure de clavette



$$\sigma_{nom.flex.} = \frac{M_f}{0.1d^3 - bt \frac{(d-t)^2}{2d}}$$

$$\tau_{nom.tors.} = \frac{M_t}{0.2d^3 - bt \frac{(d-t)^2}{2d}}$$

Tableau 4

σ _R [daN /mm ²]	K _σ (Flexion)	K _τ (Torsion)
50	1.5	1.4
70	1.75	1.65
100	2.00	1.9

Remarque: pour les arbres cannelés on fait le calcul suivant le diamètre intérieur de l'arbre sans tenir compte des concentrations de contraintes.

e- Plaque comportant un trou

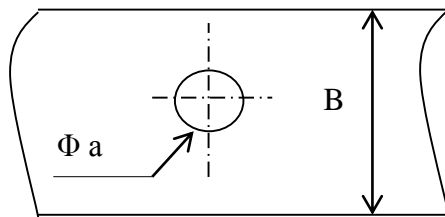


Tableau 5 :

σ_R [daN /mm ²]	K_σ (Traction)	K_σ (Flexion)
40	1.4	1.3
80	1.8	1.6
120	2.0	1.8

f- Assemblage forcé à la presse

Pression	K_σ (Flexion)		K_τ (torsion)	
	$\sigma_R \leq 700$ N / mm ²	$\sigma_R \geq 1000$ N / mm ²	$\sigma_R \leq 700$ N / mm ²	$\sigma_R \geq 1000$ N / mm ²
Pression mini 20 MPa	2.4	3.6	1.8	2.5

2- Valeurs de $K_\sigma/ \epsilon_\sigma$ et K_τ/ ϵ_τ pour les assemblages forcés sous une pression $P > 30$ MPa

Tableau 7a

σ_R [daN /mm ²]	$K_\sigma/ \epsilon_\sigma$ (flexion)			K_τ/ ϵ_τ (torsion)		
	d=15mm	d=30mm	d=50mm	d=15mm	d=30mm	d=50mm
40	1.7	2.2	2.8	1.4	1.7	2.1
80	2.6	3.3	4.0	1.9	2.4	2.8
120	4.1	5.2	5.7	2.9	3.5	3.8

Remarque : si $P \leq 3$ daN / mm² il faut multiplier $K_\sigma/ \epsilon_\sigma$ et K_τ/ ϵ_τ par le coefficient γ :

Tableau 7b

P [N /mm ²]	0	10	20	30
γ	0.65	0.83	0.94	1.00

3- Facteur d'échelle ϵ_σ et ϵ_τ :

Tableau 8

Sollicitation et matériau.	Diamètre 'd' en mm							
	15	20	30	40	50	70	100	200
ϵ_σ pour l'acier au carbone (flexion)	0.93	0.92	0.88	0.85	0.81	0.76	0.70	0.61
ϵ_σ pour l'acier allié (flexion) ϵ_τ pour tous les aciers (torsion).	0.85	0.83	0.77	0.73	0.70	0.65	0.59	0.52

4- Facteur technologique β

a- Coefficient de qualité de surface β_s

Tableau 9

Procédé d'usinage	σ_R [N/mm ²]		
	400	800	1200
Polissage	1.00	1.00	1.00
Rectification	0.95	0.90	0.80
Tournage grossier	0.85	0.80	0.65

b- Coefficient du traitement superficiel des surfaces β_{ts}

Tableau 10

Traitement superficiel	σ_R [daN/mm ²] (cœur)	β_{ts} pour les arbres		
		Sans concentration de contraintes $K_\sigma=1$	Avec petite concentration de contraintes $1 < K_\sigma < 1.5$	Avec grande concentration de contraintes $1.5 \leq K_\sigma \leq 2$
Trempe superficielle	60 à 80	1.5 à 1.7	1.6 à 1.7	2.4 à 2.8
	80 à 110	1.3 à 1.5	---	---
Nituration	90 à 120	1.1 à 1.25	1.5 à 1.7	1.7 à 2.1
	140 à 160	1.8 à 2.2	3	---
Carburation	70 à 80	1.4 à 1.5	---	---
	100 à 120	1.2 à 1.3	2	---
Traitement par jeu de billes ou par rouleaux.	60 à 150	1.1 à 1.3	1.4 à 1.6	1.6 à 2.1