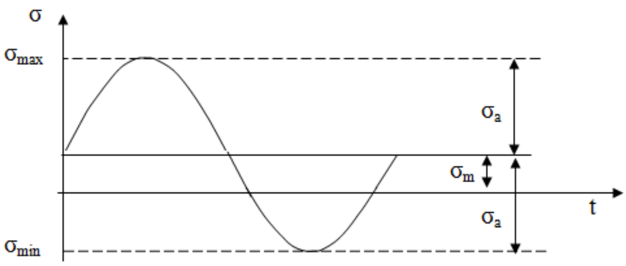
TD N°5 - Charges cycliques - Correction

Exercice 1 :

Calculer la contrainte admissible en flexion alternée pour une pièce, de section circulaire pleine de diamètre d= 40 mm, en acier allié de caractéristiques mécaniques $\sigma_R = 100$ dan/mm², $\sigma_E = 80$ dan/mm².
On donne σ_m=80dan/mm², r =-0.6, [n] = 2, $\alpha_\sigma = 1.6$, $\beta_s = 1.4$ et $\beta_{ts} = 1$.

1- Analyse de la sollicitation et du cycle de chargement

Sollicitation : Flexion alternée
Cycle : asymétrique de coefficient r =-0.6
Type de cycle : Contraintes alternées / Cycle asymétrique



$$\begin{cases} \sigma_{max} > 0 \\ \sigma_{mini} < 0 \\ \sigma_m > 0 \end{cases}$$

$$\sigma_{max} = \sigma_m + \sigma_a$$

Caractéristiques du cycle :

- Coefficient de cycle : $r = \frac{\sigma_{mini}}{\sigma_{maxi}}$
- Amplitude de contrainte σ_a : $\sigma_a = \frac{\sigma_{maxi} - \sigma_{mini}}{2}$
- Contrainte moyenne σ_m : $\sigma_m = \frac{\sigma_{maxi} + \sigma_{mini}}{2}$

2- Détermination de la contrainte admissible de la pièce :

$$[\sigma]_r = \frac{\sigma_r}{[n]}, [\tau]_r = \frac{\tau_r}{[n]}$$

σ_r : limite d'endurance en cycle asymétrique de coefficient 'r' du matériau de la pièce, elle s'écrit :

$$\sigma_r = \frac{2\sigma_D\sigma_R}{\sigma_R(1-r)+\sigma_D(1+r)}, \quad \tau_r = \frac{2\tau_D\tau_R}{\tau_R(1-r)+\tau_D(1+r)}$$

En tenant compte des différents paramètres influençant cette limite d'endurance, elle s'écrit σ_r^P:

$$\sigma_r^P = \frac{2\sigma_D\sigma_R}{\lambda_\sigma\, \sigma_R(1-r)+\sigma_D(1+r)}, \quad \tau_r^P = \frac{2\tau_D\tau_R}{\lambda_\tau\tau_R(1-r)+\tau_D(1+r)}$$

$[n]$: coefficient de sécurité admissible =2

➔ **La Contrainte admissible de la pièce est**: $[\sigma]_r^P = \frac{\sigma_r^P}{[n]}, [\tau]_r^P = \frac{\tau_r^P}{[n]}$

$$[\sigma]_r^P = \frac{\sigma_r^P}{[n]} = \frac{2\sigma_D\sigma_R}{\lambda_\sigma\, \sigma_R(1-r)+\sigma_D(1+r)} x \frac{1}{[n]}$$

- Calcul de la limite d'endurance du matériau en cycle symétrique σ_D

$$\text{Acier :}\quad \begin{cases} \sigma_{Dflexion} = 0.45\ \sigma_R \\ \sigma_{Dftraction} = 0.7\sigma_{Dflexion} \\ \tau_{DTorsion} = 0.6\ \sigma_{Dflexion} \end{cases}$$

✓ $\sigma_{Dflexion} = 0.45\ \sigma_R$=0.45x100= 45 dan/mm^2 = 450MPa

- Calcul du coefficient global tenant compte de l'influence des différents paramètres sur la limite d'endurance du matériau λ_σ donné par :

$$\lambda_\sigma = \frac{K_\sigma}{\varepsilon_\sigma . \beta}$$

✓ K_σ: Coefficient effectif de concentration des contraintes :

$$K_\sigma = 1 + q(\alpha_\sigma - 1)$$

- q : coefficient de sensibilité du matériau aux concentrations de contraintes sous charges cycliques.
  q = 0.6 à 0.8 pour les aciers non alliés.
  q = 0.9 à 1 pour les aciers alliés.
  q = 0 pour les fontes

On prend q=0.9

$-\ \alpha_\sigma = 1.6$: coefficient théorique de concentration de contraintes ou coefficient de forme

$$K_\sigma = 1 + 0.9(1.6 - 1) = 1.54$$

✓ ϵ_σ : facteur d'échelle, ses valeurs sont données dans des tableaux (Tableaux 7 et 8) ou des abaques.

Sollicitation et matériau.	Diamètre 'd' en mm							
	15	20	30	**40**	50	70	100	200
ε_σ pour l'acier au carbone (flexion)	0.93	0.92	0.88	0.85	0.81	0.76	0.70	0.61
ε_σ pour l'acier allié (flexion) ε_τ pour tous les aciers (torsion).	0.85	0.83	0. 77	**0.73**	0.70	0.65	0.59	0.52

$$\epsilon_\sigma = 0.73$$

✓ $\beta = \beta_s . \beta_{ts}$: Facteur technologique
  $-\ \beta_s$: coefficient tenant compte de la qualité de la surface
  $-\ \beta_{ts}$: coefficient tenant compte des traitements superficiels.

$$\beta = \beta_s . \beta_{ts} = 1.4x1 = 1.4$$

Le coefficient global vaut donc :

$$\lambda_\sigma = \frac{K_\sigma}{\varepsilon_\sigma . \beta} = \frac{1.54}{0.73x1.4} = 1.51$$

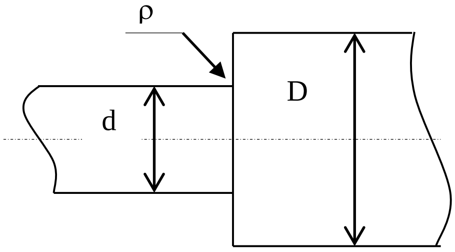
➔ **La Contrainte admissible de la pièce vaut donc :**

$$[\sigma]_r^P = \frac{\sigma_r^P}{[n]} = \frac{2\sigma_D\sigma_R}{\lambda_\sigma\ \sigma_R(1-r) + \sigma_D(1+r)} x \frac{1}{[n]} = \frac{2x450x1000}{1.51x1000(1+0.6) + 450(1-0.6)} x \frac{1}{2} = 173.34MPa$$

$$\boldsymbol{[\sigma]_r^P = 173.34\ MPa}$$

Exercice 2 :

Vérifier l'arbre, de la figure ci-contre, en acier au carbone de caractéristiques mécaniques σ_R=70 dan/mm^2, τ_E=22dan/mm^2 et τ_D = 16 dan/mm^2. L'arbre est soumis à une torsion variable avec $M_{t\ max}$ = 48 Nm et $M_{t\ min}$ = - 24 Nm



On donne :
D = 60 mm, d = 30 mm, [n] = 1.6, β =1.1 et ρ / d = 0.1.

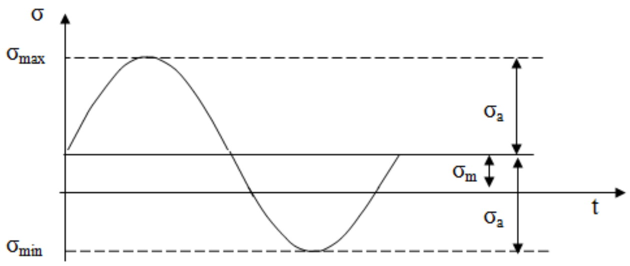
La vérification de l'arbre à la résistance consiste en la vérification de l'une des deux conditions :

- **Vérification de la condition de résistance :** $\boldsymbol{\tau_{max} \leq [\tau]^P}$
- **Vérification de la condition sur le coefficient de sécurité :** $\boldsymbol{n_\tau \geq [n]}$

I- Résolution de l'exercice par rapport à la condition de résistance : $\boldsymbol{\tau_{max} \leq [\tau]^P}$

1- Analyse de la sollicitation et du cycle de chargement

Sollicitation : Torsion alternée
Cycle : asymétrique de coefficient $r = \frac{\tau_{mini}}{\tau_{maxi}} = \frac{Mt_{min}}{Mt_{max}} = \frac{-24}{48} = -0.5$
Type de cycle : Contraintes alternées / Cycle asymétrique



$$\begin{cases}\sigma_{max} > 0 \\ \sigma_{mini} < 0 \\ \sigma_m > 0\end{cases}$$

$$\sigma_{max} = \sigma_m + \sigma_a$$

Même chose pour les contraintes tangentielles τ

Caractéristiques du cycle :

- Coefficient de cycle : $r = \frac{\tau_{mini}}{\tau_{maxi}} = \frac{Mt_{min}}{Mt_{max}} = \frac{-24}{48} = -0.5$
- Amplitude de contrainte τ_a : $\tau_a = \frac{\tau_{maxi} - \tau_{mini}}{2} = \frac{Mt_{maxi} - Mt_{mini}}{0.4d^3} = \frac{48-(-24)}{0.430^3} x1000 = 6.6\text{MPa}$
- Contrainte moyenne τ_m : $\tau_m = \frac{\tau_{maxi} + \tau_{mini}}{2} = \frac{Mt_{maxi} + Mt_{mini}}{0.4d^3} = \frac{48+(-24)}{0.430^3} x1000 = 2.2\text{MPa}$

$\tau_{maxi} = \frac{Mt_{max}}{0.2d^3}$ et $\tau_{mini} = \frac{Mt_{min}}{0.2d^3}$

2- Détermination de la contrainte admissible de la pièce :

$$[\tau]_r = \frac{\tau_r}{[n]}$$

τ_r : limite d'endurance en cycle asymétrique de coefficient 'r' du matériau de la pièce, elle s'écrit :

$$\tau_r = \frac{2\tau_D\tau_R}{\tau_R(1-r)+\tau_D(1+r)}$$

En tenant compte des différents paramètres influençant cette limite d'endurance, elle s'écrit τ_r^P:

$$\tau_r^P = \frac{2\tau_D\tau_R}{\lambda_\tau\tau_R(1-r)+\tau_D(1+r)}$$

$[n]$: coefficient de sécurité admissible =1.6

➔ **La Contrainte admissible de la pièce est**: $[\tau]_r^P = \frac{\tau_r^P}{[n]}$

$$[\tau]_r^P = \frac{\sigma_r^P}{[n]} = \frac{2\tau_D\tau_R}{\lambda_\tau\,\tau_R(1-r)+\tau_D(1+r)}\,x\,\frac{1}{[n]}$$

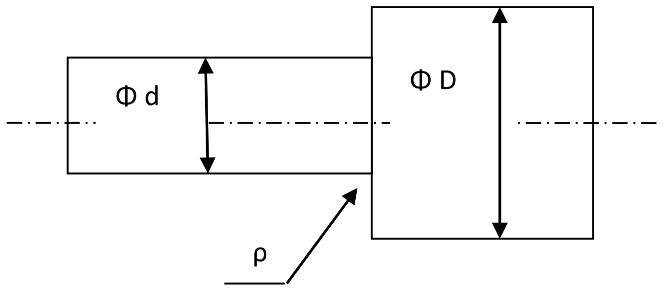
✓ $\tau_D = 160\ MPa, \tau_R = 0.5\sigma R = 0.5x700 = 350\ \text{MPa}, r = -0.5, [n] = 1.6$

- Calcul du coefficient global tenant compte de l'influence des différents paramètres sur la limite d'endurance du matériau λ_σ donné par :

$$\lambda_\tau = \frac{K_\tau}{\varepsilon_\tau.\beta}$$

✓ K_τ: Coefficient effectif de concentration des contraintes donné dans des tableaux (Tableaux 1 à 6)

Arbre étagé



$$\sigma_{nom\ flex.} = \frac{M_f}{0.1d^3},$$

$$\tau_{nom.tors.} = \frac{M_t}{0.2d^3}$$

Tableau 1

D/d	**ρ/ d**	**K_σ** (Flexion)		**K_τ** (Torsion)	
		$\sigma_R \leq 500$ N /mm^2	$\sigma_R \leq 1200$ N /mm^2	$\sigma_R \leq 500$ N /mm^2	**$\sigma_R \leq 1200$ N /mm^2**
1.2 < D/d ≤2	0.02	2.4	3.5	1.8	2.1
	0.05	2.0	2.2	1.5	1.7
	0.10	1.6	1.7	1.3	**1.4**
	0.15	1.4	1.5	1.2	1.3
	0.20	1.3	1.4	1.1	1.2

K_τ=1.4

✓ **ε_τ :** facteur d'échelle, ses valeurs sont données dans des tableaux (Tableaux 7 et 8)

Sollicitation et matériau.	Diamètre 'd' en mm							
	15	20	**30**	40	50	70	100	200
ε_σ pour l'acier allié (flexion) **ε_τ pour tous les aciers (torsion).**	0.85	0.83	**0. 77**	0.73	0.70	0.65	0.59	0.52

$$\varepsilon\tau = 0.77$$

✓ $\beta = \beta_s.\beta_{ts}$ =1.1 : Facteur technologique

$$\beta = 1.1$$

Le coefficient global vaut donc :

$$\lambda_\tau = \frac{K\tau}{\varepsilon\tau.\beta} = \frac{1.4}{0.77x1.1} = 1.65$$

➔ **La Contrainte admissible de la pièce vaut donc :**

$\tau_R = 0.5\sigma_R = 70x0.5 = 35 dan / mm^2 = 350MPa$ et $\tau_D = 16\ dan/mm^2$=160MPa, $\lambda_\tau = 1.65$, r=-0.5

$$[\tau]_r^P = \frac{\tau_r^P}{[n]} = \frac{2\tau_D\tau_R}{\lambda_\tau\,\tau_R(1-r)+\tau_D(1+r)}x\frac{1}{[n]} = \frac{2x160x350}{1.65x350(1-(-0.5))+160(1+(-0.5))}x\frac{1}{1.6}$$
$$= 73.98MPa$$

$$\boldsymbol{[\tau]_r^P = 73.98MPa}$$

3- Calcul de la contrainte tangentielle de torsion maxi :

$$\tau_{maxi} = \frac{Mt_{maxi}}{0.2d^3} = \frac{48000}{0.2x30^3} = 8.9 \text{ MPa}$$

4- Vérification de la condition de résistance : $\tau_{max} \leq [\tau]^P$

0.09MPa < 73.98MPa. La condition de résistance est vérifiée, l'arbre travaillera en toute sécurité.

II- Résolution de l'exercice par rapport à la condition sur le coefficient de sécurité : $\boldsymbol{n_\tau} \geq [\boldsymbol{n}]$

$-\ n_\tau$: Coefficient de sécurité sous chargement cyclique simple de contrainte tangentielle. Il est donné par la relation :

$$n_\tau = \frac{\tau_D\tau_R}{\lambda_\tau\tau_R\tau_a + \tau_D\tau_m}$$

- $[n]$: coefficient de sécurité admissible = 1.6

$$\tau_a = 6.6MPa, \tau_m = 2.2MPa,\ \lambda_\tau = 1.65, \tau_D = 160MPa, \tau_R = 350MPa$$

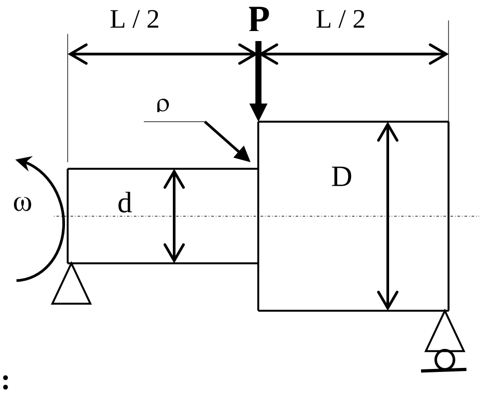
$$n_\tau = \frac{160x350}{1.65x350x6.6 + 160x2.2} = 13.45$$

$$\boldsymbol{n_\tau = 13.45}$$

Le coefficient de sécurité est largement supérieur au coefficient de sécurité admissible. L'arbre travaillera en toute sécurité.

Exercice 3 :

Calculer la force P $_{maxi}$ que peut supporter l'arbre de la figure ci-contre. Cet arbre étagé est en acier de caractéristiques mécaniques σ_R = 1200 MN/m^2 et σ_D=360MN/m^2. On donne : D = 70 mm, d = 50 mm, L=600 mm, [n] = 1.8, ρ/d=0.15 et la surface de l'arbre est rectifiée.



La résolution de l'exercice peut être conduite de deux manières :

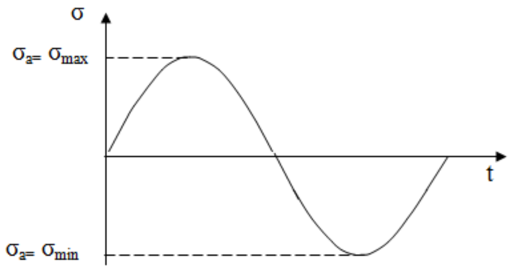
- **Soit en posant la condition de résistance par rapport aux contraintes:** $\boldsymbol{\sigma_{max}} \leq [\boldsymbol{\sigma}]^{\boldsymbol{P}}$
- **Soit en posant la condition de résistance par rapport au coefficient de sécurité :** $\boldsymbol{n_\sigma} \geq [\boldsymbol{n}]$

1-Sollicitation de l'arbre :

Ce problème est équivalent à celui d'une poutre sur deux appuis chargée au milieu par une force concentrée P. L'arbre est donc soumis à une flexion simple. Comme l'arbre est animé d'un mouvement de rotation de vitesse ω, il est donc soumis à une flexion simple rotative.
La flexion rotative est caractérisée par des contraintes alternées (traction/compression) suivant un cycle symétrique.

2- Caractérisation du cycle de chargement :

Contraintes alternées - Cycle symétrique :



$$|\sigma_{max}| = |\sigma_{mini}| = \frac{M_{fmax}}{0.1d^3}$$

$$r = \frac{\sigma_{min}}{\sigma_{max}} = -1, M_{fmax} = \frac{PL}{4}$$

$$\sigma_m = 0, \sigma_a = \sigma_{max} = \frac{PL}{0.4d^3}$$

3- Résolution en posant la condition de résistance par rapport aux contraintes: $\boldsymbol{\sigma_{max}} \leq [\boldsymbol{\sigma}]^{\boldsymbol{P}}$

a- Détermination de la contrainte admissible de la pièce :

$$[\sigma]_r = \frac{\sigma_r}{[n]}$$

σ_r : limite d'endurance en cycle asymétrique de coefficient 'r' du matériau de la pièce, elle s'écrit :

$$\sigma_r = \frac{2\sigma_D\sigma_R}{\sigma_R(1-r) + \sigma_D(1+r)}$$

En tenant compte des différents paramètres influençant cette limite d'endurance, elle s'écrit σ_r^P:

$$\sigma_r^P = \frac{2\sigma_D\sigma_R}{\lambda_\sigma\ \sigma_R(1-r)+\sigma_D(1+r)}$$

$[n]$: coefficient de sécurité admissible =1.8

➔ **La Contrainte admissible de la pièce est**: $[\sigma]_r^P = \frac{\sigma_r^P}{[n]}$

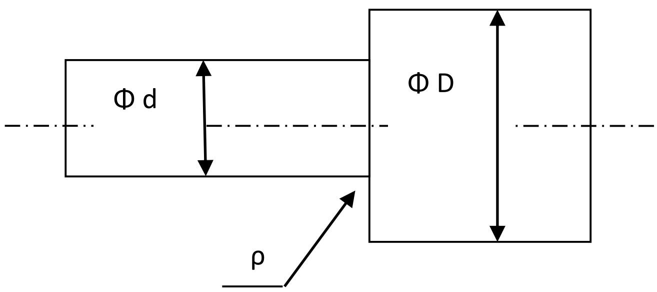
$$[\sigma]_r^P = \frac{\sigma_r^P}{[n]} = \frac{2\sigma_D\sigma_R}{\lambda_\sigma\ \sigma_R(1-r) + \sigma_D(1+r)} x \frac{1}{[n]}$$

- Limite d'endurance du matériau en cycle symétrique σ_D=360MN/m^2,
- r=-1, σ_R = 1200 MN/m^2, [n]=1.8
- Calcul du coefficient global tenant compte de l'influence des différents paramètres sur la limite d'endurance du matériau λ_σ donné par :

$$\lambda_\sigma = \frac{K_\sigma}{\varepsilon_\sigma.\beta}$$

✓ K_τ: Coefficient effectif de concentration des contraintes donné dans des tableaux (Tableaux 1 à 6)

Arbre étagé



$$\sigma_{nom.flex.} = \frac{M_f}{0.1d^3},$$

$$\tau_{nom.tors.} = \frac{M_t}{0.2d^3}$$

Tableau 1

D/d	ρ/ d	K_σ (Flexion)		K_τ (Torsion)	
		$\sigma_R \leq 500$ N /mm²	$\sigma_R \leq 1200$ N /mm²	$\sigma_R \leq 500$ N /mm²	$\sigma_R \leq 1200$ N /mm²
1.2 < D/d ≤2 D/d=1.4	0.02 0.05 0.10 0.15 0.20	2.4 2.0 1.6 1.4 1.3	3.5 2.2 1.7 1.5 1.4	1.8 1.5 1.3 1.2 1.1	2.1 1.7 1.4 1.3 1.2

K_τ =1.5

- ✓ ϵ_σ : facteur d'échelle, ses valeurs sont données dans des tableaux (Tableaux 7 et 8) ou des abaques.

Sollicitation et matériau.	Diamètre 'd' en mm							
	15	20	30	40	50	70	100	200
ε_σ pour l'acier au carbone (flexion)	0.93	0.92	0.88	0.85	0.81	0.76	0.70	0.61
ε_σ pour l'acier allié (flexion) ε_τ pour tous les aciers (torsion).	0.85	0.83	0. 77	0.73	0.70	0.65	0.59	0.52

$$\boldsymbol{\epsilon_\sigma = 0.70}$$

- ✓ $\beta = \beta_s.\beta_{ts}$: Facteur technologique
  - $-\ \beta_s$: coefficient tenant compte de la qualité de la surface
  - $-\ \beta_{ts}$: coefficient tenant compte des traitements superficiels.
- ➢ $\beta_{ts} = 1$: aucune condition sur les traitements superficiels de la surface de l'arbre
- ➢ $\beta_t = 0.8$: surface de l'arbre rectifiée

Coefficient de qualité de surface β_s : Tableau 9

Procédé d'usinage	σ_R [N /mm²]		
	400	800	1200
Polissage	1.00	1.00	1.00
Rectification	0.95	0.90	0.80
Tournage grossier	0.85	0.80	0.65

$$\boldsymbol{\beta = \beta_s.\beta_{ts} = 0.8x1 = 0.8}$$

Le coefficient global vaut donc :

$$\lambda_\sigma = \frac{K_\sigma}{\varepsilon_\sigma.\beta} = \frac{1.5}{0.7x0.8} = 2.68$$

$$\boldsymbol{\lambda_\sigma = 2.68}$$

➔ **La Contrainte admissible de la pièce vaut donc :**

$$[\sigma]_r^P = \frac{\sigma_r^P}{[n]} = \frac{2\sigma_D\sigma_R}{\lambda_\sigma\,\sigma_R(1-r)+\sigma_D(1+r)}x\frac{1}{[n]} = \frac{2x360x1200}{2.68x1200(1-(-1))+360(1+(-1))}x\frac{1}{1.8} = 74.6MPa$$

$$\boldsymbol{[\sigma]_r^P = 74.6\ MPa}$$

b- Contrainte maxi et condition de résistance :

- Contrainte maxi : $\sigma_{max} = \frac{PL}{0.4d^3}$
- Condition de résistance : $\boldsymbol{\sigma_{max} \leq [\sigma]^P}$

$$\frac{PL}{0.4d^3} \leq 74.6 \rightarrow Pmax \leq \frac{74.6x0.4d^3}{L} = \frac{74.6x0.4x50^3}{600} = 6216N$$

$$\boldsymbol{Pmax \leq 6216N}$$

4-Résolution en posant la condition de résistance par rapport au coefficient de sécurité: $\boldsymbol{n_\sigma \geq [n]}$

- $[n]$: coefficient de sécurité admissible = 1.8

$-\ n_\sigma$: Coefficient de sécurité sous chargement cyclique simple de contrainte normale. Il est donné par la relation :

$$n_\sigma = \frac{\sigma_D \sigma_R}{\lambda_\sigma \sigma_R \sigma_a + \sigma_D \sigma_m}$$

$$\sigma_a = \frac{PL}{0.4d^3}, \sigma_m = 0,\ \lambda_\sigma = 2.68, \sigma_D = 360MPa, \sigma_R = 1200MPa$$

$$n_\sigma = \frac{360x1200}{2.68x1200x\frac{PL}{0.4d^3} + 0} \geq 1.8$$

$$n_\sigma = \frac{360x1200x0.4x50^3}{2.68x1200x600Pmax} \geq 1.8 \rightarrow Pmax \leq \frac{360x1200x0.4x50^3}{2.68x1200x600x1.8} = 6218\ N$$

$$\boldsymbol{Pmax \leq 6218\ N}$$