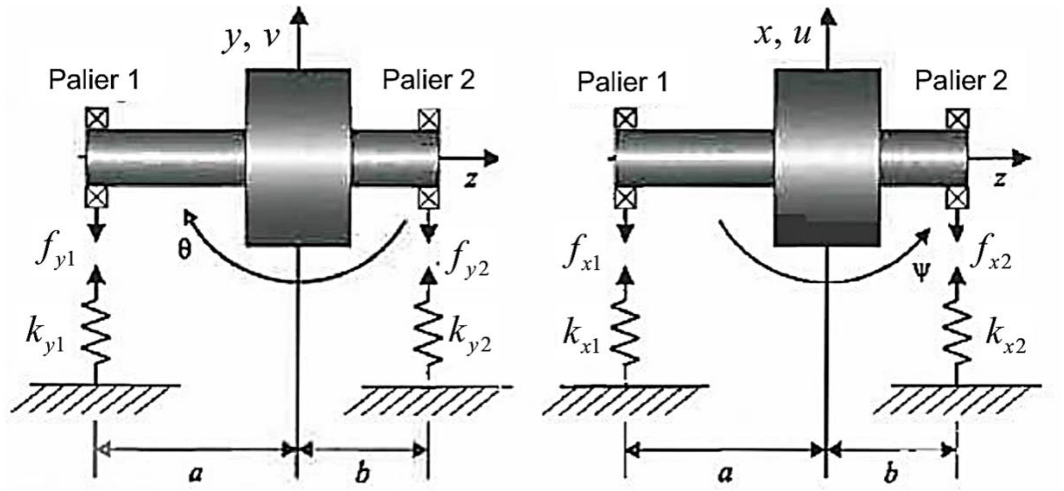
Université MOULOUD MAMMERI De Tizi-Ouzou. 2021/2022
Faculté de génie de la construction.
Département de génie mécanique.

Master 2CM-FMP

Solution de l'examen de Dynamique des Machines Tournantes

Exercice 1 (06 Pts) :

1/ les équations différentielles du mouvement :



1

Bilan des forces selon Ox: $-f_{x1} - f_{x2} = m\ddot{u}$

Bilan des forces selon Oy: $-f_{y1} - f_{y2} = m\ddot{v}$

Bilan des moments selon la direction θ : $-af_{y1} + bf_{y2} = I_d\ddot{\theta} + I_p\Omega\dot{\psi}$

Bilan des moments selon la direction ψ : $af_{x1} - bf_{x2} = I_d\ddot{\psi} - I_p\Omega\dot{\theta}$

1

En supposant les déplacements petits, les ressorts linéaires et qu'il n'y a pas de couplage élastique entre les directions Ox et Oy :

$$
\begin{aligned}
f_{x1} &= k\delta = k(u - a\sin\psi) \approx k(u - a\psi)\\
f_{x2} &= k\delta = k(u + b\sin\psi) \approx k(u + b\psi)\\
f_{y1} &= k\delta = k(v + a\sin\theta) \approx k(v + a\theta)\\
f_{y2} &= k\delta = k(v - b\sin\theta) \approx k(v - b\theta)
\end{aligned}
$$

1

En substituants les forces dans les équations précédentes :

$$
\begin{aligned}
&m\ddot{u} + 2ku + (-a + b)k\psi = 0\\
&m\ddot{v} + 2kv + (a - b)k\theta = 0\\
&I_d\ddot{\theta} + I_p\Omega\dot{\psi} + (a - b)kv + (a^2 + b^2)k\theta = 0\\
&I_d\ddot{\psi} - I_p\Omega\dot{\theta} + (-a + b)ku + (a^2 + b^2)k\psi = 0
\end{aligned}
$$

1

2/ les pulsations propres si $a = b$ et les effets gyroscopiques sont négligés :

Dans ce cas les équations différentielles du mvt devient :

$$
\begin{aligned}
&m\ddot{u} + 2ku = 0\\
&m\ddot{v} + 2kv = 0\\
&I_d\ddot{\theta} + (a^2 + b^2)k\theta = 0\\
&I_d\ddot{\psi} + (a^2 + b^2)k\psi = 0
\end{aligned}
$$

1

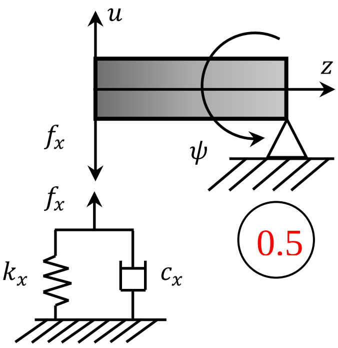
0.5 $\boxed{\omega_1 = \omega_2 = \sqrt{\frac{2k}{m}}}$ et $\boxed{\omega_3 = \omega_4 = \sqrt{\frac{l^2 k}{2I_d}}}$ 0.5

Exercice 2 (14 Pts) :

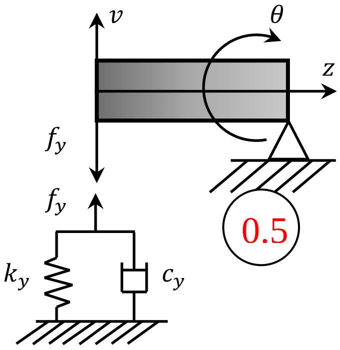
$l = 1\,m \quad I_p = 1\,kg.m^2 \quad I_d = 10\,kg.m^2 \quad k = k_x = k_y = 1\,MN/m \quad k_c = 0.2\,MN/m$

$f_x = ku + k_c v \; ; \; f_y = k_c u + kv$

1°/ Les équations différentielle de mvt :

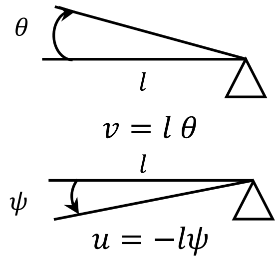


0.5



0.5

Les déplacements u et v en fonction des rotation θ et ψ.



0.5

0.5

Moments agissant dans la direction de θ : $-f_y.l = I_d\ddot{\theta} + I_p\Omega\dot{\psi}$ 0.5

Moments agissant dans la direction de ψ : $f_x.l = I_d\ddot{\psi} - I_p\Omega\dot{\theta}$ 0.5

$\boxed{f_x = ku + k_c v}$; $\boxed{f_y = k_c u + kv}$

En substituants f_x et f_y dans les équations des moments :

$$\begin{cases} I_d\ddot{\theta} + I_p\Omega\dot{\psi} + k_c l u + klv = 0 \\ I_d\ddot{\psi} - I_p\Omega\dot{\theta} - klu - k_c l v = 0 \end{cases}$$

$\boxed{v = l\theta}$; $\boxed{u = -l\psi}$

En substituant u et v dans les équations des moments :

$$\boxed{\begin{cases} I_d\ddot{\theta} + I_p\Omega\dot{\psi} + kl^2\theta - k_c l^2\psi = 0 \\ I_d\ddot{\psi} - I_p\Omega\dot{\theta} + kl^2\psi - k_c l^2\theta = 0 \end{cases}}$$ 1

Soit ces équations sous forme matricielle :

$$\boxed{\begin{bmatrix} I_d & 0 \\ 0 & I_d \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{\psi} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & I_p\Omega \\ -I_p\Omega & 0 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} kl^2 & -k_c l^2 \\ -k_c l^2 & kl^2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \theta \\ \psi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}}$$ 1

Partie 1 : les effets gyroscopiques sont négligés et $k_c = 0$

$$\boxed{\begin{cases} I_d\ddot{\theta} + kl^2\theta = 0 \\ I_d\ddot{\psi} + kl^2\psi = 0 \end{cases}}$$ 1

Les pulsations propres du système sont :

0.5 $$\boxed{\omega_1 = \omega_2 = \sqrt{\frac{kl^2}{I_d}} = \sqrt{\frac{10\text{^}6}{10}} = 316.22\,rad/s} \Rightarrow \boxed{f_1 = \frac{\omega_{1,2}}{2*\pi} = 50.32\,Hz}$$ 0.5

2°/ Soit : $\theta = \theta_0 e^{j\omega t}$ et $\psi = \psi_0 e^{j\omega t}$, résoudre les équations de mouvement et déterminer les fréquences propres du système lorsque le rotor est à l'arrêt et lorsqu'il tourne à $1000\ tr/min$

$$\boxed{\begin{cases}\theta = \theta_0 e^{j\omega t}\\ \psi = \psi_0 e^{j\omega t}\end{cases}} \boxed{\begin{cases}\dot\theta = j\omega\theta_0 e^{j\omega t}\\ \dot\psi = j\omega\psi_0 e^{j\omega t}\end{cases}} \boxed{\begin{cases}\ddot\theta = -\omega^2\theta_0 e^{j\omega t}\\ \ddot\psi = -\omega^2\psi_0 e^{j\omega t}\end{cases}}$$

Substituant la solution dans le système d'équation :

$$\left[\begin{bmatrix}-\omega^2 I_d & 0\\ 0 & -\omega^2 I_d\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0 & j\omega I_p\Omega\\ -j\omega I_p\Omega & 0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}kl^2 & -k_c l^2\\ -k_c l^2 & kl^2\end{bmatrix}\right]\begin{Bmatrix}\theta_0\\ \psi_0\end{Bmatrix} e^{j\omega t} = \begin{Bmatrix}0\\0\end{Bmatrix}$$

$$\boxed{\begin{bmatrix}-\omega^2 I_d + kl^2 & j\omega I_p\Omega - k_c l^2\\ -j\omega I_p\Omega - k_c l^2 & -\omega^2 I_d + kl^2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\theta_0\\ \psi_0\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}0\\0\end{Bmatrix}}$$ 1

La matrice doit être singulière, donc son déterminant est nul :

$$(-\omega^2 I_d + kl^2)^2 - (-j\omega I_p\Omega - k_c l^2)(j\omega I_p\Omega - k_c l^2) = 0$$

$$\boxed{{I_d}^2\omega^4 - \left(2kI_d l^2 + \Omega^2 {I_p}^2\right)\omega^2 + l^4\left(k^2 - {k_c}^2\right) = 0}$$ 0.5

- Cas 1 : Rotor à l'arrêt $\Omega = 0$

L'équation caractéristique du mvt devient :

$${I_d}^2\omega^4 - 2kI_d l^2\omega^2 + l^4\left(k^2 - {k_c}^2\right) = 0$$

AN :

$$10^2 * \omega^4 - 2 * 10^6 * 10 * 1^2\omega^2 + 1^4(10^{12} - 0.04 * 10^{12}) = 0$$

$$\boxed{\omega^4 - 2 * 10^5 * \omega^2 + 0.96 * 10^{10} = 0}$$ 0.5

$\Delta = 4 * 10^{10} - 4 * 0.96 * 10^{10} = 0.16 * 10^{10}$

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{2*10^5 - \sqrt{0.16*10^{10}}}{2}} \Rightarrow \boxed{\omega_1 = 282.84 rad/s} \Rightarrow \boxed{f_1 = \frac{\omega_1}{2*\pi} = 45.01 Hz}$$ 1

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{2*10^5 + \sqrt{0.16*10^{10}}}{2}} \Rightarrow \boxed{\omega_2 = 346.41\,rad/s} \Rightarrow \boxed{f_2 = \frac{\omega_2}{2*\pi} = 55.13 Hz}$$ 1

- Cas 2 : Rotor tourne à $1000\ tr/min$; $\Omega = \frac{1000*2\pi}{60} = 104.71\ rad/s$

$$10^2 * \omega^4 - (2 * 10^6 * 10 * 1^2 + 104.72^2 * 1^2)\omega^2 + 1^4(10^{12} - 0.04 * 10^{12}) = 0$$

$$10^2 * \omega^4 - (2 * 10^6 * 10 + 104.72^2)\omega^2 + 0.96 * 10^{12} = 0$$ 1

$$\boxed{\omega_1 = 282.45\,rad/s} \Rightarrow \boxed{f_1 = \frac{\omega_1}{2*\pi} = 44.95\,Hz}$$ 1

$$\boxed{\omega_2 = 346.88\,rad/s} \Rightarrow \boxed{f_2 = \frac{\omega_2}{2*\pi} = 55.20\,Hz}$$ 1